

| | | | | | | | |
|------|----|----|---|----|---|------|--|
| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 校 | フリガナ | |
| | | | | | | 氏名 | |

1 2つの壺があり、片方の壺 1 には赤い球が 9 個と白い球が 1 個、もう一方の壺 2 には赤い球 1 個と白い球が 9 個入っている。いま無作為に壺を選び、1 個の球を取り出してその色を調べ、その球をとり出した壺に戻して、もう一度同じ壺から球を取り出すという試行を考える。

この試行において「まず壺 1 を選び、最初に選んだ球が赤、2 度目に選んだ球が白である」という結果を $(1, R, W)$ と表すなどして、標本空間 Ω を

$$\Omega = \{(1, R, R), (1, R, W), (1, W, R), (1, W, W), \\ (2, R, R), (2, R, W), (2, W, R), (2, W, W)\}$$

と定める。

a) この確率モデルにおいて、 $P(\{(1, R, R)\}), P(\{(2, R, R)\})$ はそれぞれどのように定められるべきか。

$$P(\{(1, R, R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{200}$$

$$P(\{(2, R, R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{200}$$

b) 「最初に選んだ球は赤である」という事象を A 、「2 度目に選んだ球は赤である」という事象を B とする。 A, B をそれぞれ外延的記法で表せ。

$$A = \{(1, R, R), (1, R, W), (2, R, R), (2, R, W)\}$$

$$B = \{(1, R, R), (1, W, R), (2, R, R), (2, W, R)\}$$

c) 「最初に選んだ球は赤であり、2 度目に選んだ球も赤である」という事象は $A \cap B$ と表せるが、その確率 $P(A \cap B)$ をもとめよ。

$$P(A \cap B) = P(\{(1, R, R)\}) + P(\{(2, R, R)\}) \\ = \frac{81}{200} + \frac{1}{200} = \frac{41}{100}$$

d) 事象 A をあらためて標本空間とみなして Ω_A とおき、新たな確率モデルを考える。このとき「2 度目に選んだ球も赤である」という事象を Ω_A の事象、すなわち Ω_A の部分集合とみたとき、これを外延的記法で表せ。またこの事象の確率はこの新たなモデルでどのように定められるべきか。

$$\{(1, R, R), (2, R, R)\}$$

$$P(A) = \frac{81}{200} + \frac{9}{200} + \frac{1}{200} + \frac{9}{200} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\Omega_A \text{ での } \{(1, R, R), (2, R, R)\} \text{ の確率は } \frac{\frac{41}{100}}{\frac{1}{2}} = \frac{41}{50}$$

2 ある大学の学生の数学と英語の成績分布は次の表の通りであった。

| | 英語 | | |
|----|-----|-----|-----|
| 数学 | A | B | C |
| A | 15% | 15% | 5% |
| B | 10% | 20% | 10% |
| C | 5% | 10% | 10% |

この学生の中から無作為に 1 人を選んで、その学生の数学と英語の成績を尋ねるという試行において、標本空間 Ω を $\Omega = \{(X, Y) \mid X \text{ は数学の成績, } Y \text{ は英語の成績}\}$ と設定する。そして、数学の成績が A であるという事象を M 、英語の成績が A であるという事象を E とする。

a) 事象 M をあらためて標本空間とみなし、 Ω_M とおく。 Ω_M を外延的記法で表せ。

$$\Omega_M = \{(A, A), (A, B), (A, C)\}$$

b) Ω_M を標本空間とすると、 Ω_M の各事象 N についてその確率を $P_M(N)$ と書く。事象 $\{(A, A)\}$, $\{(A, B)\}$, $\{(A, C)\}$ の確率 $P_M(\{(A, A)\})$, $P_M(\{(A, B)\})$, $P_M(\{(A, C)\})$ をそれぞれ求めよ。

$$P_M(\{(A, A)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$P_M(\{(A, B)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$P_M(\{(A, C)\}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

c) こゝでは事象 E を標本空間とみなし、 Ω_E とする。 Ω_E を外延的記法で表せ。

$$\Omega_E = \{(A, A), (B, A), (C, A)\}$$

d) ある学生を選んだとき、その学生の英語の成績は A であった。この学生の数学の成績が C である確率を求めよ。

$$P_E(\{(A, C)\}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

3] ある会社で同じ製品を2つの工場 X, Y で製造していて、製品に不良品が含まれる確率は、工場 X では4%、工場 Y では5%であるという。いま、工場 X の製品 1000 個と工場 Y の製品 800 個がある。

a) 下の表を完成させよ。

| 工場 \ 良・不良 | 良品 | 不良品 | 計 |
|-----------|--------|------|--------|
| X | 960 個 | 40 個 | 1000 個 |
| Y | 760 個 | 40 個 | 800 個 |
| 計 | 1720 個 | 80 個 | 1800 個 |

これら 1800 個の製品の中から無作為に 1 個を取り出すとき、取り出した製品が X で製造された良品であることを (X, 良) などと表すことにし、この試行の標本空間を $\Omega = \{(X, \text{良}), (X, \text{不良}), (Y, \text{良}), (Y, \text{不良})\}$ とおく。

b) 取り出した製品が工場 X の良品である確率 $P(\{(X, \text{良})\})$ を求めよ。

$$P(\{(X, \text{良})\}) = \frac{960}{1800} = \frac{8}{15}$$

c) 取り出した製品が良品であるという事象を A とする。P(A) を求めよ。

$$P(A) = \frac{1720}{1800} = \frac{43}{45}$$

d) これら 1800 個の製品の中から 1 個を取り出したとき、それは良品であった。このとき、この製品が工場 X で生産されていた確率を求めよ。

$$\frac{960}{1720} = \frac{24}{43}$$

4] ある街でタクシーによるひき逃げ事故があった。その街にはそれぞれ緑色のタクシーと青色のタクシーを使っている2つのタクシー会社がある。その街で走っているタクシーの85%は緑色のタクシーであり、15%は青色のタクシーである。目撃者はひき逃げタクシーは青色であったと証言した。その時間帯のその場所での証言の識別力を調べたところ、緑色と青色のタクシーのそれぞれに対して、常に80%は正しく識別できることが明らかになった。さて、事故を起こしたタクシーが本当に青色タクシーであった確率は求めたい。

a) 実際のタクシーの色が緑色であるとき、目撃者が青色であると識別する事象を (緑, 青) などと表すことにし、標本空間 $\Omega = \{(\text{緑}, \text{緑}), (\text{緑}, \text{青}), (\text{青}, \text{緑}), (\text{青}, \text{青})\}$ とする。このとき、 $P(\{(\text{緑}, \text{緑})\})$, $P(\{(\text{緑}, \text{青})\})$, $P(\{(\text{青}, \text{緑})\})$, $P(\{(\text{青}, \text{青})\})$ をそれぞれ求めよ。

$$P(\{(\text{緑}, \text{緑})\}) = 0.85 \times 0.8 = 0.68, \quad P(\{(\text{緑}, \text{青})\}) = 0.85 \times 0.2 = 0.17$$

$$P(\{(\text{青}, \text{緑})\}) = 0.15 \times 0.2 = 0.03, \quad P(\{(\text{青}, \text{青})\}) = 0.15 \times 0.8 = 0.12$$

b) 次の表の空欄を埋めよ。

| タクシー \ 証言 | 緑 | 青 | 計 |
|-----------|------|------|-------|
| 緑 | 68 % | 17 % | 85 % |
| 青 | 3 % | 12 % | 15 % |
| 計 | 71 % | 29 % | 100 % |

c) 目撃者が青色であると証言する事象を A とする。A を外延的記法で表し、その確率 P(A) を求めよ。

$$A = \{(\text{緑}, \text{青}), (\text{青}, \text{青})\}$$

$$P(A) = 0.17 + 0.12 = 0.29$$

d) タクシーの色が青である事象を B とする。目撃者が青色であると証言したとき、実際にタクシーの色が青である確率 $P_A(B)$ を求めよ。

$$P_A(B) = \frac{P(\{(\text{青}, \text{青})\})}{P(A)} = \frac{0.12}{0.29} = \frac{12}{29} \approx 0.414$$