基礎数学 B1	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
火曜 4 限 担当: 鍬田 政人													

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある．

1 実数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合 A, B を

- $A = \{x \mid x^2 - x + 6 > 0\}$ 「−」のつもりだった．その場合 $A=\{x \mid x<-2, x>3\}$
- $B = \{x \mid |x-2| > 3\}$ $= \{x \mid x-2<-3, x-2>3\}$

とする． $= \{x \mid x<-1, x>5\}$

a) $A \cup \overline{B}$ をなるべく簡単な形で表せ．

$x^2-x+6 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{23}{6} > 0$ より $A = U$ $\{x \mid x<-2, x\geqq -1\}$

$\therefore A \cup \overline{B} = U \cup \overline{B} = U =$ 実数全体の集合.

b) $\overline{A \cap B}$ をなるべく簡単な形で表せ．

$\overline{A \cap B} = \overline{U \cap B} = \overline{B} = \overline{\{x \mid x<-1, x>5\}}$

$= \{x \mid -1 \leqq x \leqq 5\}$ $\{x \mid x \leqq 3, x>5\}$

2 袋の中に赤と白のサイコロが 1 個ずつ入っている．この袋からサイコロを 1 つ選び，それを投げるという試行を行う．この試行において，赤いサイコロを選ぶことを R，白を選ぶことを W で表し，たとえば，白いサイコロを選び，それを投げて出た目の数が 3 であるという結果を (W, 3) という記号で表すとする．

a) この試行の標本空間 Ω を上の記号を用いて表せ．

$\Omega = \{(R,1),(R,2),(R,3),(R,4),(R,5),(R,6),$
$(W,1),(W,2),(W,3),(W,4),(W,5),(W,6)\}$

b) Ω の要素の個数，およびこの試行におけるすべての事象の個数を求めよ．

$n(\Omega) =$ 12

事象の個数 $= 2^{12} = 4096$

c) 「赤いサイコロを選び，出た目は 4 以上である」という事象を A とする．A を表す集合を上の記号を用い，外延的記法によって表せ．

$A = \{(R,4),(R,5),(R,6)\}$

d) 「投げたサイコロの出た目の数が偶数である」という事象を B とするとき，$A \cap B$ を表す集合を外延的記法によって表せ．

$A \cap B = \{(R,4),(R,6)\}$

e) 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ を求めよ．

$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

f) 事象 A と事象 B は独立であるかどうかを判定せよ．

$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap B)$

したがって A と B は独立ではない．

3 事象 A, B について，$P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B) = \frac{1}{2}$ であるとする．

a) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ であるとき，$P(A \cap B)$ を求めよ．また，このとき事象 A と B は独立であるかを判定せよ．

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12} = P(A \cap B)$ より

A, B は独立ではない．

b) 事象 A と B が独立であるとき，$P(A \cup B)$ を求めよ．

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ となればよい

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

4 ある調査によれば，無作為に選んだメールの 20% が迷惑メール，残り 80% が一般のメールであるという．また，この調査によると，迷惑メールに「無料」という単語が含まれている確率は 30% で，一般のメールが「無料」という単語を含んでいる確率は 2% であるという．
メールを受け取ったとき，それが迷惑メールであるという事象を A，そのメールが「無料」という単語を含むという事象を B として，以下の問いに答えよ．

a) 問題文から直接 $P(A)$, $P_A(B)$, $P_{\overline{A}}(B)$ を求めよ．

$P(A) = 0.2$

$P_A(B) = 0.3$

$P_{\overline{A}}(B) = 0.02$

b) $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ を求めよ．

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = 0.8 \times 0.02 = 0.016$

c) メールの種類と，「無料」という単語を含むか含まないかの割合を表す下の一覧表を完成させよ．

「無料」 / メール	含む B	含まない $\overline{B}$	計
迷惑 A	6 %	14 %	20 %
一般 $\overline{A}$	1.6 %	78.4 %	80 %
計	7.6 %	92.4 %	100%

d) 無作為に選んだメールが「無料」という単語を含んでいたとき、それが迷惑メールである確率を求めよ．

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.06}{0.076} = \frac{15}{19} \fallingdotseq 0.789$

【裏面につづく】

5 1 から 6 までの番号をつけた 6 枚のカードから，同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の差の絶対値を X とする．

a) X の確率分布を求めよ．

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

b) X の期待値と分散を求めよ．

$$E(X) = 1\times\frac{5}{15} + 2\times\frac{4}{15} + 3\times\frac{3}{15} + 4\times\frac{2}{15} + 5\times\frac{1}{15}$$

$$= \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 1\times\frac{5}{15} + 4\times\frac{4}{15} + 9\times\frac{3}{15} + 16\times\frac{2}{15} + 25\times\frac{1}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$= \frac{105}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

c) 確率変数 Y を 1 次式 $Y = aX + b$ で定める．ただし，a，b は定数で，$a > 0$ とする．Y の期待値が 0，分散が 1 となるような a，b の値を求めよ．

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b = \frac{7}{3}a + b = 0 \quad \cdots①$$

$$V(Y) = V(aX+b) = a^2V(X) = \frac{14}{9}a^2 = 1 \quad \cdots②$$

②より $a = \sqrt{\frac{9}{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$

①より $b = -\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{14}}{\cancel{14}} = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

6 二つの確率変数 X，Y に対して，共分散と呼ばれる値 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ が定義され，$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ であることが知られている．いま，確率変数 X，Y に対して $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ が成り立てば，$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ であることを証明せよ．

［ヒント：$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2$ であることを用いるとよい．］

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2$$

$$= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) + E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$= V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$$

したがって $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ならば

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

7 あるプロバスケットボール選手がフリースローを成功させる確率は 75% であるという．この選手が 1 シーズン 400 回フリースローをおこなったとして，成功する回数を X とする．X の期待値と分散を求めよ．

X は二項分布 $B(400, 0.75)$ に従う

$E(X) = 400 \times 0.75 = 300$

$V(X) = 400 \times 0.75 \times 0.25 = 75$

8 原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．2 個のサイコロを同時に投げるとき，ともに偶数の目が出たならば P は $+3$ だけ移動し，そうでなければ -1 だけ移動する．サイコロを 12 回投げ終わったとき，~~同じ目~~ ともに偶数 が出た回数を X とし，そのときの P の座標を Y とする．以下の問いに答えよ．

a) X は二項分布に従う．その分布を $B(n,p)$ の形で表せ．

$X \sim B\left(12, \frac{1}{4}\right)$

b) X の期待値，分散を求めよ．

$E(X) = 12 \times \frac{1}{4} = 3$

$V(X) = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

c) X と Y の関係を式で表せ．

$$Y = 3X + (-1)\times(12 - X)$$

$$= 4X - 12$$

d) Y の期待値，分散を求めよ．

$E(Y) = E(4X-12) = 4E(X) - 12 = 0$

$V(Y) = V(4X-12) = 16V(X) = 16 \times \frac{9}{4} = 36$

— 以上 —