入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

a を 1 でない正の定数とするとき，a を底とする x の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい．いま，x が $x+h$ まで変化したときの $f(x) = a^x$ の平均変化率を指数法則を用いて変形すると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

となる．したがって

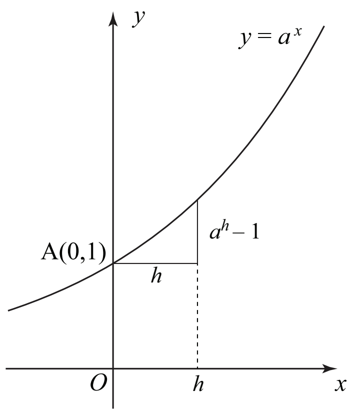
(1)　$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$

が得られる．ここで，極限

(2)　$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$

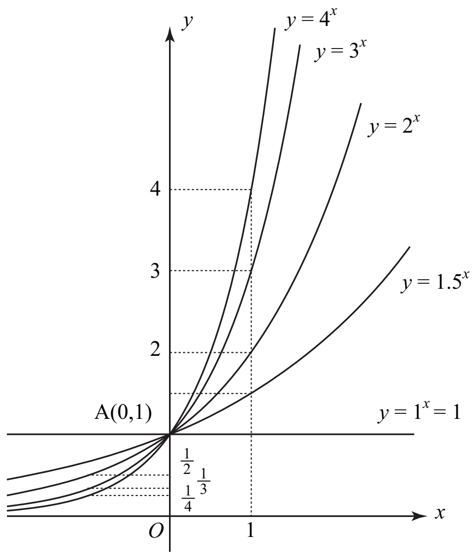
は $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h}-a^0}{h}$ に等しく，曲線 $y = a^x$ の上の点 A$(0,1)$ における接線の傾きにほかならない．いま，それを m_a で表すことにすれば，(1) から

(3)　$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot m_a$



が導かれ，$m_a = f'(0)$ がわかれば $f'(x)$ が計算できたことになる．

そこで，極限 (2) の値がどのようになるかを考える．右の図を見ると，曲線 $y = a^x$ の上の点 A$(0,1)$ における接線の傾き m_a は，a が大きくなるほど大きくなることがわかる．そこで実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに $\frac{a^h-1}{h}$ の値の数値計算をしてみよう．スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて，右のページの表を作ってみよう．大抵のスマートフォンの関数電卓アプリでは有効数字 16 桁以上の計算ができるので，できる限りくわしく計算してみてほしい．（Excel は小数点演算の精度が低いのでこの程度の計算でも誤差が出るので不可．）



例えば $\frac{2^{0.01}-1}{0.01}$ を計算するには $(2^{0.01}-1)\times 100$ を計算すればよいので，シンプルな関数電卓（例えば iPhone の電卓アプリ）では次の順序で入力すればよい．

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0.1	0.717734625362932 . . .	1.161231740339044 . . .
0.01	0.695555005671881 . . .	1.104669193785359 . . .
0.001		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		
10^{-7}		
10^{-8}		
10^{-9}		
10^{-10}		

この表より $\frac{2^h-1}{h}$，$\frac{3^h-1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ，その値は次のように推測できる．

$$m_2 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{},\qquad m_3 = \lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}$$

前ページの結果を見ると $m_2 < 1$ かつ $m_3 > 1$ であることがわかる．したがって，2 と 3 の間に $m_a = 1$ となるような a の値があるだろうと考えられる．実は，$m_a = 1$ となるような a の値は単純な有理数ではないこと知られているので，そのような数を e という文字で表し，Nepier の数とか，自然対数の底と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である．

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{4}$$

すると (4) から，$f(x)=e^x$ ならば $f'(x)=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$ が得られる．

指数関数の e^x の導関数：　$(e^x)'=e^x$

$\boxed{1}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a}=a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$ である．そこで，$y=e^u$，$u=(\log a)x$ とおいて，合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意．］

$\boxed{2}$ $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．そこで，$f'(x)=e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x)=\log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること，すなわち $(\log x)'=\frac{1}{x}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ 前問によれば，$f(x)=\log x$ としたとき，$f'(1)=\frac{1}{1}=1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log(1+h)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

である．（最後の等号は log が連続関数なので log と $\lim_{h\to 0}$ の順序が入れ替えらることによる．）よって，

$$f'(1)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=1$$

となり，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は log をとると 1 になるような値，すなわち，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

となる．そこで，次の表を用い $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算してみよう．$h=1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 10^{-9}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	2.5937424601
0.01	2.70481382941526...
0.001	.
10^{-4}	.
10^{-5}	.
10^{-6}	.
10^{-7}	.
10^{-8}	.
10^{-9}	.
↓	↓
0	.

これより，$e=$ $\boxed{}$ と推測される．