2020 年 1 月 10 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人							

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 $f(x) = -\sqrt{2x+6}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域： $2x+6 \geqq 0$ より $x \geqq -3$

値域 ： $y \leqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = -\sqrt{2x+6} \Rightarrow y^2 = 2x+6$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - 3$

x と y を入れ換えて $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$． 定義域 $x \leqq 0$

値域 $y \geqq -3$

c) $f(x)$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を極限による定義を直接用いて計算せよ．

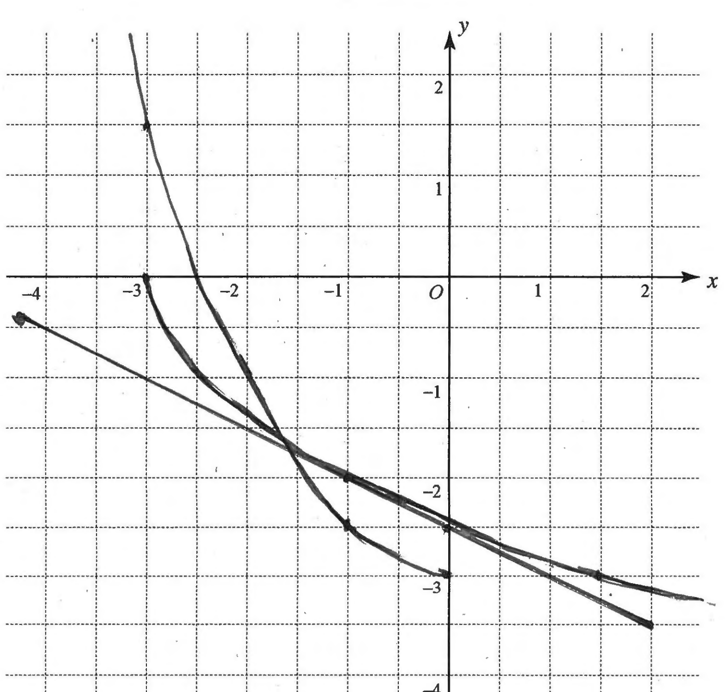
$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{4-2h} - (-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-\sqrt{4-2h})(2+\sqrt{4-2h})}{h(2+\sqrt{4-2h})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(2+\sqrt{4-2h})} = \frac{-2}{2+\sqrt{4}} = \frac{-1}{2}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ．

$y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$ より

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(-1, f(-1))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを下の座標平面内に描け．



2 $f(x) = \dfrac{-4x+1}{2x-3}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

$x \neq \frac{3}{2}$

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x-3}$ の形に表せ．

$$\begin{array}{r} -2 \\ 2x-3 \overline{)\, -4x+1} \\ \underline{-4x+6} \\ -5 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-4x+1}{2x-3} = -2 + \frac{-5}{2x-3}$$

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ． ［定義に戻る必要はない．前問の形に直してから計算するとよい．］

$$f'(x) = -5\left((2x-3)^{-1}\right)' = 5(2x-3)^{-2} \times (2x-3)'$$
$$= \frac{10}{(2x-3)^2}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $\left(-1, f(-1)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

$y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$

$y = \frac{10}{25}(x+1) - 1$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

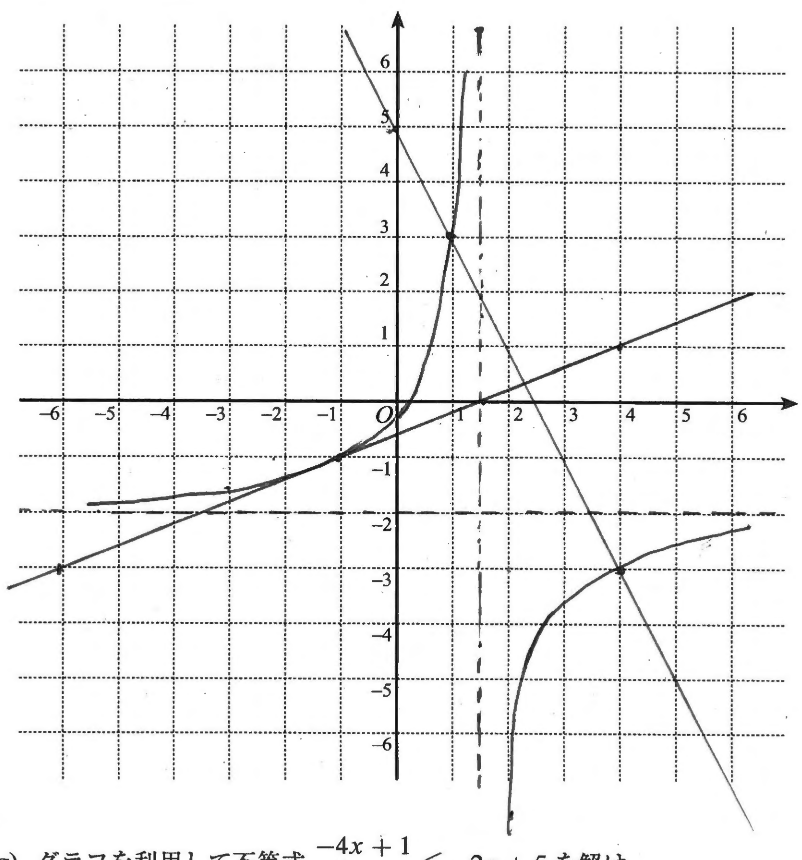
e) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -2x+5$ の交点を求めよ．

$\frac{-4x+1}{2x-3} = -2x+5 \Rightarrow -4x^2+16x-15 = -4x+1$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, 4$

$\therefore (1, 3), (4, -3)$

f) $y = f(x)$ のグラフ，d) で求めた接線，および直線 $y = -2x+5$ を下の座標平面内に描け．

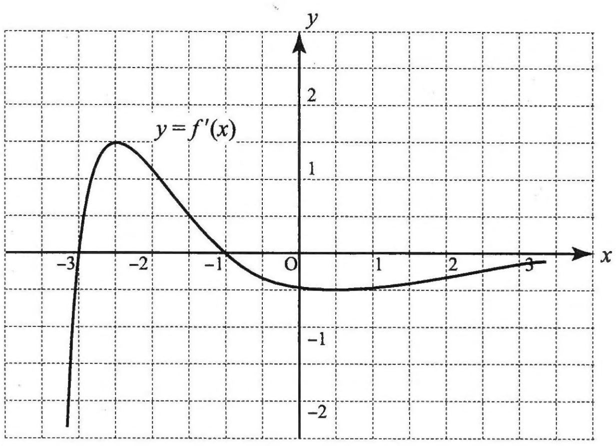


g) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-4x+1}{2x-3} \leqq -2x+5$ を解け．

グラフより $x \leqq 1$ または $\frac{3}{2} < x \leqq 4$

【裏面につづく】

3 下の図はある関数 $f(x)$ について，その導関数 $y = f'(x)$ のグラフの概形を示したものである．



a) 上の図をもとに，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↘ ↴ で表せ．)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{5}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

b) 関数 $f(x)$ が極大，極小となる x の値と，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

3

極大：$x = -1$

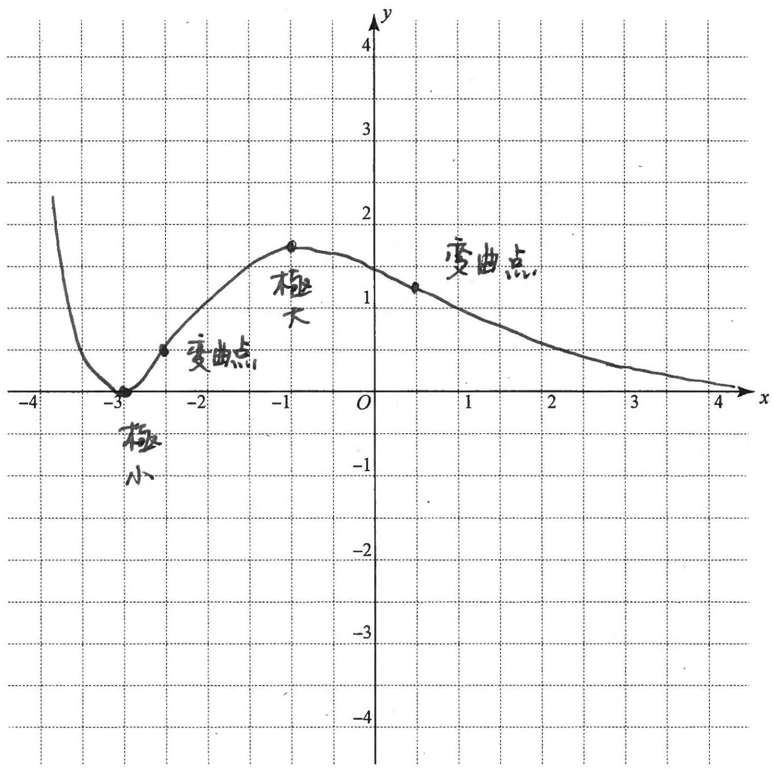
極小：$x = -3$

変曲点：$x = -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

c) さらに，$f(x)$ の値および $x \to +\infty$ としたときの極限が下の表に示されているとおりであるとする．

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	0

このとき，$y = f(x)$ のグラフを可能な限り忠実に描き，極大・極小点および変曲点を示せ．



4 $f(x)$ が微分可能微分可能な関数であるとき，$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)' = \left(f(x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} f(x)^{-\frac{2}{3}} \cdot f'(x)$$
$$= \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}}$$

5 $f(x)$ が微分可能な関数であるとき，$\left(e^{f(x)^2}\right)'$ を求めよ．

$$\left(e^{f(x)^2}\right)' = e^{f(x)^2} \cdot \left(f(x)^2\right)'$$
$$= 2f(x)f'(x)e^{f(x)^2}$$

6 次の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)'$$
$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{1-x^2} - x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

c) $f(x) = (x+1)e^{-x^2}$

$$f'(x) = (x+1)'e^{-x^2} + (x+1)\left(e^{-x^2}\right)'$$
$$= e^{-x^2} + (x+1)e^{-x^2} \cdot (-x^2)'$$
$$= (1 - 2x(x+1))e^{-x^2}$$
$$= (1 - 2x - 2x^2)e^{-x^2}$$

d) $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{1+x}{1-x} \times \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{-(1+x) - (1-x)}{1+x}$$
$$= \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$$

12

2020 年 1 月 10 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人							

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

$x > 0$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2}$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{2-x}{x^3}$

e) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ.(増減だけでなくグラフの凹凸も調べ, 曲がった矢印 ↗ ↗ ↘ ↘ で表すこと.)

x	0	…	1	…	2	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	1	↗	$\frac{1}{2}+\log 2$	↗

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ.

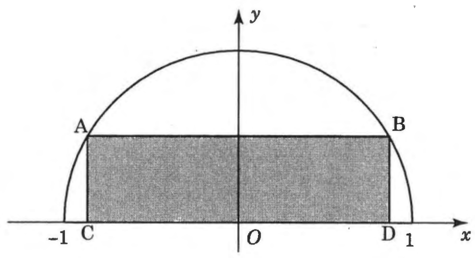
極大：なし

極小：$x = 1$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ.

$x = 2.$

i) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の上半分に, y 軸に関して対称な 2 点 $A(-x, y)$, $B(x, y)$ がある. ただし, $x \geqq 0$ とする. A, B から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ C, D とする.



a) 長方形 ABDC の面積 S を x で表せ.

CD の長さ $= 2x$,

BD の長さ $= \sqrt{1-x^2}$ より

$S = 2x\sqrt{1-x^2}$

b) S の最大値を求めよ. また, そのときの x の値をもとめよ.

$\dfrac{dS}{dx} = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$

$= 2\,\dfrac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

x の動く範囲 $0 \leq x \leq 1$, $\dfrac{dS}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…	1
$\frac{dS}{dx}$	×	$+$	0	$-$	×
S	0	↗	1	↘	0

増減表より $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき S は最大で

最大値は 1.

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの裏も使用して下さい】