入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ $f(x) = \sqrt{-4x+12}$ のとする.

a) $f(x)$ の定義域，値域を求めよ.

定義域:　$-4x + 12 \geqq 0$ より，$x \leqq 3$
値域:　$y = f(x)$ とおくと，$y \geqq 0$

b) $f(x)$ の導関数を求めよ.

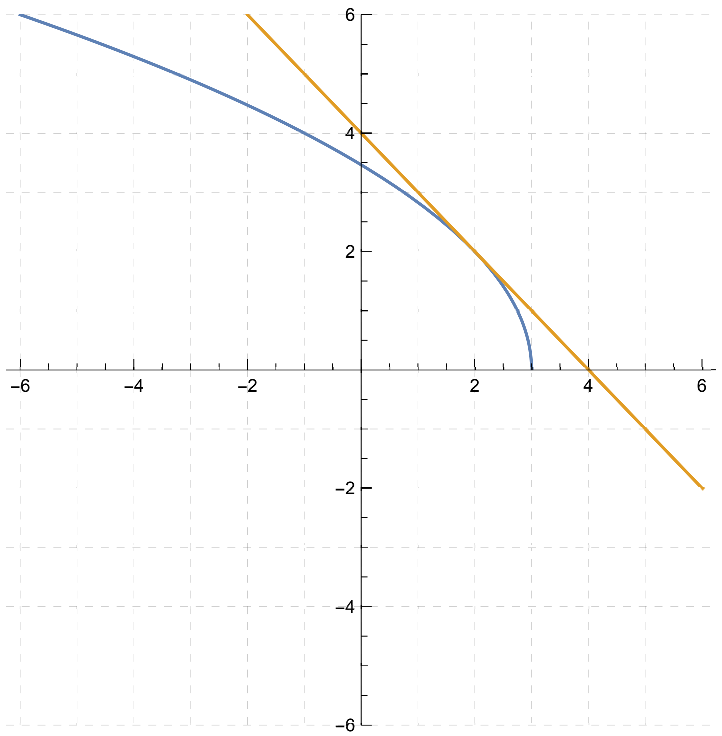
$$f'(x) = \left((-4x+12)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-4x+12)^{-\frac{1}{2}}(-4x+12)' = \frac{-2}{\sqrt{-4x+12}} = \frac{-1}{\sqrt{3-x}}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(2, 2)$ における接線の方程式を求めよ.

接線の傾きは $f'(2) = \frac{-1}{\sqrt{3-2}} = -1$．したがって，

$$y - 2 = (-1)(x-2)$$
$$\therefore y = -x + 4$$

d) $y = f(x)$ のグラフと $(2, 2)$ における接線を描け.



$\boxed{2}$ $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

定義域:（根号内）$\geqq 0$ より，$-2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x(\sqrt{4-x^2})' = \sqrt{4-x^2} + x\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ.

最大値：　2　$(x = \sqrt{2})$
最小値：　-2　$(x = -\sqrt{2})$

3 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

真数条件より， $x > 0$.

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ．

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$， $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

c) b) の結果を用い， $\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ．

$e = 2.718\cdots < \pi = 3.14159\ldots$ だから，上の増減表より $f(e) > f(\pi)$.

これより直ちに， $\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ が導かれる．

d) c) の結果を用い， π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ． ［ヒント： $\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ．］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に $e\pi (> 0)$ をかけて， $e \log \pi < \pi \log e$.

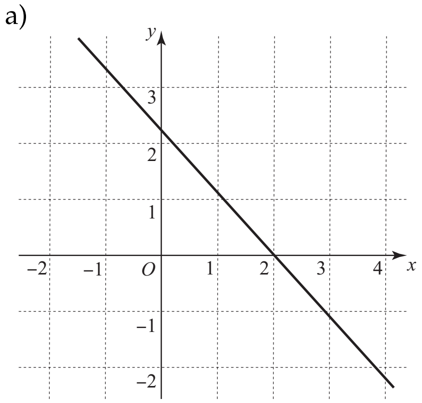
さらに，対数の性質を用いて $\log \pi^e < \log e^\pi$.

ここで，対数の底 e は 1 より大きいから， $\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$ が成り立つ．

したがって， $\pi^e < e^\pi$.

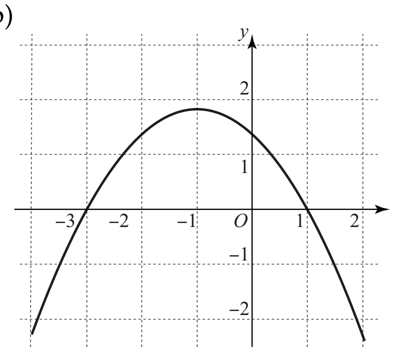
4 次の各々のグラフは導関数 $y = f'(x)$ のグラフの概形を示したものである．これをもとに， $f'(x)$ と $f''(x)$ の値の正負を読み取り，関数 $f(x)$ の増減表を書いて， $y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，極大・極小となる点，変曲点をもとめよ．（凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．）

a)



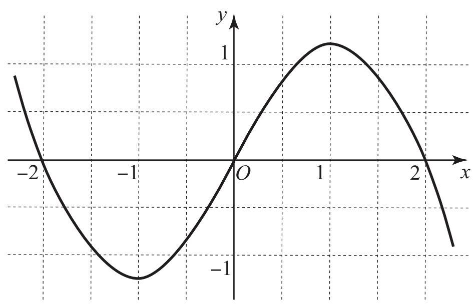
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↱	極大	⤵

b)



x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

c)



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↱	極大	⤵	変曲点	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)