入学年度	学部	学科		組		番号		検	フリガナ
									氏名

1 次の関数で，各々の場合について平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

a) $f(x) = x^3 - 1$，x が -1 から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{3} = 3$$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$，x が a から $a+h$ まで変化するとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{3(a+h)^2+1-(3a^2+1)}{h} = \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h$$

2 静止している物体を自然に落下させたとき，落下しはじめてから t 秒後までの間に落ちる距離を s m とすれば，$s = f(t) = 4.9t^2$ であることが知られている．

a) 物体が，落下しはじめて 2 秒後から 4 秒後までの間の間の平均の速さを求めよ．

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4.9\times16-4.9\times4}{2} = \frac{4.9\times12}{2} = 4.9\times6 = 29.4\ (m/s)$$

b) 物体が，落下しはじめてから 3 秒後の瞬間の速さを極限を直接計算することによって求めよ．

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{4.9(3+h)^2-4.9\times3^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{4.9(6h+h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}4.9(6+h) = 29.4\ (m/s)$$

c) 物体が，落下しはじめて a 秒後から $a+h$ 秒後までの間の平均の速さを求めよ．また，a 秒後の瞬間の速さを求めよ．

平均の速さ $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{4.9(a+h)^2-4.9a^2}{h} = \dfrac{4.9(2ah+h^2)}{h}$

$= 4.9(2a+h)\ (m/s)$

瞬間の速さ $= \lim_{h\to0}4.9(2a+h) = 4.9\times2a = 9.8a\ (m/s)$

3 関数 $f(x) = (2x+1)^2$ とするとき，次の微分係数を定義にしたがって求めよ．

a) $f'(-1) = \lim_{h\to0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to0}\dfrac{(2(-1+h)+1)^2-(2(-1)+1)^2}{h}$

$$= \lim_{h\to0}\frac{(2h-1)^2-(-1)^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{4h^2-4h+1-1}{h} = \lim_{h\to0}(4h-4) = -4$$

b) $f'(a) = \lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to0}\dfrac{(2(a+h)+1)^2-(2a+1)^2}{h}$

$$= \lim_{h\to0}\frac{((2a+1)+2h)^2-(2a+1)^2}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(2a+1)^2+4(2a+1)h+4h^2-(2a+1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}(4(2a+1)+4h) = 4(2a+1)$$

4 関数 $f(x) = x^3 - 1$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(-1) = \lim_{h\to0}\frac{(-1+h)^3-1-((-1)^3-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{-1+3h-3h^2+h^3-1-(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{3h-3h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to0}(3-3h+h^2)$$

$$= 3$$

5 関数 $f(x) = x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) = 4x^3$$

$\boxed{6}$ 次の関数の導関数を求めよ．（まず，$f(x)$ を展開せよ．）

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3(x^2 - 4)$

b) $f(x) = x(7x - 3x^2)$

$f'(x) = (7x^2 - 3x^3)' = 14x - 9x^2$

c) $f(x) = (2x-1)(3x+5)$

$f'(x) = (6x^2 + 7x - 5)' = 12x + 7$

d) $f(x) = (5x-1)^2$

$f'(x) = (25x^2 - 10x + 1)' = 50x - 10$
$= 10(5x - 1)$

e) $f(x) = (4x^2 - 1)(3x + 2)$

$f'(x) = (12x^3 + 8x^2 - 3x - 2)'$
$= 36x^2 + 16x - 3$

f) $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x) = x^2 - x + 1$ について，次の問いに答えよ．

a) x が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b^2 - b + 1) - (a^2 + a + 1)}{b - a}$$
$$= \frac{(b^2 - a^2) - (b - a)}{b - a} = b + a - 1$$

b) $x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が，a) の平均変化率に一致するとき，$c = \dfrac{a+b}{2}$ であることを示せ．

$f'(x) = 2x - 1$ より $f'(c) = 2c - 1$

$b + a - 1 = 2c - 1$ を c について解くと $c = \dfrac{a+b}{2}$

（一般に2次関数では x が a から b に変化したときの平均変化率は その中点での微分係数に等しい）

$\boxed{8}$ 半径 r の球の表面積 S と体積 V をそれぞれ r の関数と考え，S と V を r で微分せよ．

$S = 4\pi r^2$　　$S' \left(= \dfrac{dS}{dr}\right) = 8\pi r$

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$　　$V' \left(= \dfrac{dV}{dr}\right) = 4\pi r^2$ （$= S$，これは偶然ではない）

$\boxed{9}$ 次の関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) > 0 \iff 3x(x+2) > 0$
$\iff x < -2$ または $x > 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
$= 3(x-3)(x+1)$

$f'(x) > 0 \iff 3(x-3)(x+1) > 0$
$\iff x < -1$ または $x > 3$

【発展問題】

$\boxed{10}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ．

a) x が a から $a + h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{h} \times \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h}\frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

b) $x = a$ における微分係数を定義に従って求めよ．

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$