

| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ |
|------|----|----|---|----|---|------|
| | | | | | | 氏名 |

1 次のそれぞれの式を簡単にせよ。ただし、文字はすべて正とする。

a) $4^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $(a^{\frac{1}{3}} - 1)(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1) = a - 1$

c) $(a^x + a^{-x})^2 - (a^x - a^{-x})^2 = 4$

d) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

e) $\frac{(ab^{-\frac{5}{2}}) \div (a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{5}{4}})}{(a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}) \div (a^{\frac{9}{4}} b^{-\frac{1}{2}})} = a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{5}{2}}$

2 次の数の大きさをくらべよ。 0.5^4 , 0.5^{-3} , 2^{-2} .

$x < y \Leftrightarrow 2^x < 2^y$ だから、すべてを 2^a の形に直して比べればよい。

$0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}$, $0.5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$ であり、 $2^{-4} < 2^{-2} < 2^3$ だから

$$0.5^4 < 2^{-2} < 0.5^{-3}$$

3 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

a) $0.3^x > 0.09$

$0.09 = 0.3^2$ なので、上の不等式は $0.3^x > 0.3^2$ となる。ここで、対数の底 0.3 は 1 より小さいので $x < y \Leftrightarrow 0.3^x > 0.3^y$ と不等号の向きが入れ替わることに注意すると、 $0.3^x > 0.3^2 \Leftrightarrow x < 2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq (\sqrt{2})^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-(x-1)}$, $(\sqrt{2})^x = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$ となる。この不等式は $2^{-(x-1)} \geq 2^{\frac{x}{2}}$ となる。これは $-(x-1) \geq \frac{x}{2}$ と同値。したがって、 $x \leq \frac{2}{3}$ 。

4 $\log_2 3 = a$ とするとき、次のそれぞれの値を a を用いて表せ。

a) $\log_4 9$

b) $\log_3 4$

c) $\log_9 2$

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 4} = \frac{2 \log_2 3}{2} = a.$$

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = \frac{2}{a}.$$

$$\log_9 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3^2} = \frac{1}{2a}.$$

5 次のそれぞれの式を簡単にせよ。

a) $2^{\log_2 3} = 3$

b) $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24} = \log_5 \left(\frac{3^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2})^3}{\sqrt{24}} \right) = \log_5 1 = 0$

c) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9} \right)$
 $= (2 \log_2 3) \left(\frac{5}{2 \log_2 3} \right) = 5$

d) $\log_2 8 \cdot \log_{27} 5 \cdot \log_5 3 = \log_2 2^3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3^3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = 3 \cdot \frac{\log_2 5}{3 \log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = 1$

6 次の方程式を解け。

a) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

真数条件は、 $(x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ または $x > -1$ 。

$$\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0.5^{-1} \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -3. \text{ これらはどちらも真数条件をみたすので、}$$

解は $x = 0, -3$ 。

b) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

真数条件は、 $(x-2) > 0$ かつ $(2x-7) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$ 。

$$\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x-2)(2x-7) = 2 \Leftrightarrow (x-2)(2x-7) = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 5, \frac{1}{2}. \text{ このうち真数条件をみたすのは、}$$

解は $x = 5$ のみ。

7 「過疎現象で、村の人口が毎年1割ずつ減っていくので、このままでは10年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか。

人口が毎年1割ずつ減るとは、人口が前年の9割になる、すなわち前年の0.9倍になるということである。これが10年続くと、人口はもとの $(0.9)^{10}$ になるが、これは0ではないので、村が空っぽになるわけではない。

以下の問題では、必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ。

- 8 a) 2^{41} は何桁の数か。
- b) 2^{41} の最高位の数字を求めよ。

$\log_{10} 2^{41} = 41 \log_{10} 2 \approx 41 \times 0.3010 = 12.3410$ であるが、
 $\log_{10} 2 \approx 0.301 < 0.341 < \log_{10} 3 \approx 0.4771$
より、
 $\log_{10}(2 \times 10^{12}) < \log_{10} 2^{41} < \log_{10}(3 \times 10^{12})$
が成り立つ。すなわち、
 $2 \times 10^{12} < 2^{41} < 3 \times 10^{12}$
これは 2^{41} が13桁の数で、最高位の数字が2であることを示している。

9 体内に入った水銀が体外に排出されて、もとの量の $\frac{1}{2}$ になるには125日かかるといわれている。もとの量の $\frac{1}{10}$ 以下になるには何日かかるか。

水銀が体内に入ってから125日後にもとの量の $\frac{1}{2}$ なり、 125×2 日後にはもとの量の $(\frac{1}{2})^2$ 、 125×3 日後にはもとの量の $(\frac{1}{2})^3$ 、…、 $125 \times n$ 日後にはもとの量の $(\frac{1}{2})^n$ となる。
 $(\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log_{10} (\frac{1}{2})^n \leq \log_{10} \frac{1}{10} \Leftrightarrow -n \log_{10} 2 \leq -1$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\log_{10} 2} \approx \frac{1}{0.3010} \approx 3.322$

水銀が体内に入ってから $125 \times 3.322 \approx 415.3$ 日後にもとの量の $\frac{1}{10}$ になる。
[水銀が体内に入ってから x 日後にはもとの量の $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}}$ になるから $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}} \leq \frac{1}{10}$ を解いてもよい。]

10 座標軸の1目盛りを1cmとして関数 $y = 2^x$ のグラフをかくとき、 x の変域をたとえば $0 \leq x \leq 10$ とすると y の変域は $1 \leq y \leq 2^{10}$ となり、グラフ用紙は y 軸方向について1024cmの長さが必要と考えられる。 x の変域を $0 \leq x \leq 60$ としたとき、グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さが必要か。次のうちから最も近いものを選び、理由をつけて答えよ。

- a) 1km
- b) 100km
- c) 地球から月までの距離 (約38万km)
- d) 地球から太陽までの距離 (約 1.5×10^{11} m)
- e) 1光年 (約 9.5×10^{15} m)

$2^{10} = 1024$ cmを $10^3 = 1000$ cmで近似すると、 $2^{60} = (2^{10})^6 \approx (10^3)^6 = 10^{18}$ cmとなる。
 $100\text{cm} = 1\text{m}$ であることを考えると、 2^{60} cmは約 10^{16} mである。
一方、1光年は9.5を約10と見なすと、約 $10 \times 10^{15} = 10^{16}$ mとなり、 2^{60} cmに一番近いのはe)の1光年であることがわかる。

11 星の見かけの明るさは1等星、2等星、…、など、等級で表す。星の等級と明るさの関係は、次のように対数を用いて表すことができる。 m 等星の明るさを L_m 、 n 等星の明るさ L_n とすると、

$$0.4(n - m) = \log_{10} L_m - \log_{10} L_n$$

が成り立つ。

- a) 1等星の明るさは6等星の明るさの何倍であるか。

上式で $m = 1$, $n = 6$ とおくと

$$0.4(6 - 1) = \log_{10} L_1 - \log_{10} L_6 \Leftrightarrow 2 = \log_{10} \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow 10^2 = \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow L_1 = 100L_6$$

すなわち、1等星の明るさは6等星の明るさの100倍。

- b) 北極星は2.0等星である。北極星の2倍の明るさを持つ星は何等星となるか。

北極星の2倍の明るさを持つ星を m 等星とすると、 $\frac{L_m}{L_2} = 2$ が成り立つ。一方、上式で $n = 2$ とおいた式より、 $\log_{10} \frac{L_m}{L_2} = 0.4(2 - m)$ が成り立つ。これより、

$$\log_{10} 2 = 0.4(2 - m) \Leftrightarrow m = 20 = 2 - \frac{\log_{10} 2}{0.4} \approx 2 - \frac{0.3010}{0.4} = 1.2475$$

したがって、北極星の2倍の明るさを持つ星は約1.25等星