3. 多変数関数の偏微分

$\boxed{1}$ ある町工場では 2 種類の自転車を製作している．ひとつの種類は標準モデルで，もう 1 種類は競技用モデルである．いま，一週間に，標準モデルを x 台，競技用モデルを y 台製作するのに

$$C(x, y) = 70 + 7x + 10y \quad \text{（千円）}$$

の費用がかかるとしよう．さらに，価格と需要の関係は次の式にしたがっているとする．

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$
$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで， x (台)， y (台) はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要， p (千円)， q (千円) はそれぞれ，標準モデルと競技用モデルの値段である．

a) 一週間の歳入 $R(x, y)$ を求めよ．また， $R(25, 10)$ を計算せよ．

b) 一週間に得られる利潤 $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$ を求めよ．また， $P(25, 10)$ を計算せよ．

c) 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき，標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

d) 逆に，標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき，競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し，変数 y は固定して定数と見なし， z を x の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の x に関する偏微分と呼ぶ．これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x, y) = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)$$

などと様々な記号で表わされる．同様にして変数 x は固定して定数と見なし， z を y の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の y に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x, y) = f_y(x, y) = \partial_y f(x, y)$$

などと表わす．

関数 $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における偏微分係数は，極限を用いて表すと次のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

$\boxed{2}$ a) 上の問題の $P(x, y)$ について， $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y)$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ を求めよ．

b) $\dfrac{\partial P}{\partial x}(15, 10)$， $\dfrac{\partial P}{\partial x}(30, 10)$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}(25, 10)$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}(25, 15)$ の値をそれぞれ計算せよ．

c) 利潤 $P(x, y)$ が最大になるような生産台数 x， y の組を求めよ．

1 変数関数の場合，関数 $f(x)$ において， x が a から $a+\Delta x$ に変化したとき，その値は

$$f(a+\Delta x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)\Delta x$$

と近似できるのであった．多変数の場合には，これが偏微分を用いて拡張できる．

関数 $z = f(x, y)$ において x を a から $a+\Delta x$ に， y を b から $b+\Delta y$ に同時に変化させたとき， z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\cdot\Delta y$$

で与えられることが知られている．

$\boxed{3}$ 底面の半径 r cm，高さ h cm の直円柱の底面の半径と高さが，それぞれ，わずかに Δr cm， Δh cm ずつ増えたとき，直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか，また表面積はどれくらい増えるか．

$\boxed{4}$ 生産量 Q が資本 K と労働力 L の関数として $Q = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている．

a) $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$， $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ を求めよ．

【注】 $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$ は**資本の限界生産力**， $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ は**労働の限界生産力** と呼ばれる．

b) いま (K, L) が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき， Q の変化量の近似値を求めよ．

担当： 鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)