

5. Lagrange の乗数法

点 (x, y) が、条件 $g(x, y) = 0$ をみたしつつ変化するとき、関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めたい。いま、点 (a, b) で $f(x, y)$ が極値を持つとすると、2つのベクトル $(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ と $(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b))$ が平行となることが示せる。これは、実数 λ (ラムダ) を用いて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \right)$$

と表せることにほかならない。そこで、このような条件付き極値問題を考えるとき、新たに第3の変数 λ を導入し、3変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ を考えると、もとの条件付きの問題がこの関数 $L(x, y, \lambda)$ の条件なしの極値問題に言い換えられることがわかる。正確には以下の通り。

条件付極値問題

拘束条件 $g(x, y) = 0$ の下で、関数 $f(x, y)$ の極値を求めたい。このとき、新たに第3の変数 λ を導入し、3変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する。(λ は Lagrange の乗数と呼ばれ $L(x, y, \lambda)$ は Lagrange 関数と呼ばれる。) このとき、 $L(x, y, \lambda)$ の(無条件での)極値を求めると、 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値が求まる。したがって、極値を求めるには

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

例題 直線 $y = 2x + 3$ 上の点と原点 O との距離の最小値を求めよ。

解 原点との距離が最小になることと、距離の2乗が最小になることは同値なので、拘束条件 $g(x, y) = y - 2x - 3 = 0$ の下で、距離 d の2乗 $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$ が最小値となる (x, y) を求めればよい。そこで、Lagrange 関数を

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - \lambda(y - 2x - 3)$$

と定義し、各々の偏微分を計算して、それらがすべて0になる点を求める。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(-2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(y - 2x - 3) = 0 \end{cases}$$

第2式を λ について解き, 第1式に代入して整理すると

$$2x + 4y = 0$$

が得られる. これと第3式を x, y についての連立1次方程式と見て解くと

$$x = -\frac{6}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$$

を得る. 本来, このままではこの x, y で $f(x, y)$ が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが, この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し, 最大値が存在しないことがわかる. そこで, 上の値を $f(x, y)$ に代入して, $f(x, y)$ の最小値は $\frac{9}{5}$ となる. したがって距離の最小値は $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ である.

- 1 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $2x^2 + 4xy + 5y^2$ の最大値と最小値を求めよ.
- 2 【効用最大化問題】消費者の効用関数が $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ で与えられているとする. このとき, 所得制約式 $p_1x + p_2y = I$ のもとで $u(x, y)$ を最大にする (x, y) をLagrangeの乗数法により求めよ.
- 3 【費用最小化問題】消費者の効用関数 $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ をある一定レベル u_0 に保ち, この効用レベルで支出 $S(x, y) = p_1x + p_2y$ を最小にしたい. そのような (x, y) をLagrangeの乗数法により求めよ.
- 4 厚紙を用いて図のような中仕切りがあるふたつきの箱をつくる. 使用する厚紙の面積が一定値 S であるとき, 容積 V が最大になるような箱の寸法を求めよ. またその時の箱の容積を求めよ.

