2. 漸近展開

微分の定義をもう一度振り返ってみよう．関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限によって

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と定義されるのであった．上の式の見方を変えて， $R(h)$ を平均変化率と微分係数（瞬間変化率）の差として

(1) $$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

と定義すると $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$ が成り立つ． (1) の分母を払って， $R(h) = hr(h)$ と置き、整理し直すと

(2) $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim_{h \to 0} r(h) = 0$$

が成り立つ．

一般に， 0 のまわりで定義された関数 $\varepsilon(h)$ が， $h \to 0$ としたとき 0 に近づくなら，すなわち $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成り立つなら， $\varepsilon(h)$ は**無限小**であるという．例として， n が自然数のとき，関数 h^n は無限小である．また， n が大きくなればなるほど， h^n は急速に 0 に近づく．そこで， $\varepsilon(h)$ が n **次より高次の無限小**であることを

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h^n} = 0$$

と定義する． (2) は $f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ が 1 次の無限小でであるということに他ならない．

前回の授業で， $f(x)$ が 3 階微分可能であるなら，部分積分を用いることにより，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0)h^2 + \frac{1}{2} \int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\, dx$$

が成り立つことを示した．さらに， $h > 0$ の場合のみではあるが， $0 \leqq x \leqq h$ において $m \leqq f'''(x) \leqq M$ となるなら， $R(h) = \frac{1}{2} \int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\, dx$ は

$$\frac{m}{2} h^3 \leqq R(h) \leqq \frac{M}{2} h^3$$

をみたす．これより， $\frac{m}{2} h \leqq \frac{R(h)}{h^2} \leqq \frac{M}{2} h$ であり， $h \to 0$ としたとき，左辺右辺ともに 0 に収束するから $\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h^2} = 0$ である．この議論は $h < 0$ の場合にも拡張でき， $R(h)$ は 2 次より高次の無限小であることがわかる．これより，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0)h^2 + (2\text{ 次より高次の無限小})$$

と表すことが出来る．この式を

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0)h^2 + o(h^2)$$

と表す．ここで，これはその上の式の<u>略記法</u>であって， $o(h^2)$ は実際の関数を表すものではないことに注意する． $o(h^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので，積分定数 C と似た扱いがなされる．また， $o(h^0) = o(1)$ とは単に無限小である関数，すなわち $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ となる関数全般のことである．

前回の結果をさらに応用すると，$f(x)$ が n 階微分可能であるとき，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

が成り立つことがわかる．この式はしばしば h を x に書き直して，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{3}$$

この式は，$x \to 0$ としたときの極限に関しては，$f(x)$ が，

$$f(x) = (n\ \text{次の多項式}) + (n\ \text{次より高次の無限小})$$

と表されていることを示している．(3) の形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの**漸近展開**と呼ぶ．
大雑把に考えると，$f(x)$ は $x = 0$ のまわりで多項式に「展開」でき，$o(x^n)$ は「x^{n+1} 以上の項」をひとくくりにしたものいえる．
具体例として，$f(x) = e^x$ とすると，$f^{(n)}(x) = e^x$，$ff^{(n)}(0) = 1$ だから，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

下の式はその他の主な関数の漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$f(x)$ の漸近展開は $x \to 0$ としたときの極限の計算に有用である．ただし，$o(x^n)$ と近似計算の誤差項 $R_n(h)$ と混同してはならない．$o(x^n)$ は $x \to 0$ としたときの極限に関する性質であり，誤差項 $R_n(h)$ では h は（無限小ではない）有限の値をとり，$R_n(h)$ も有限の値である．