1. 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において， a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 h だけ変化させたときの値 $f(a+h)$ の近似値を求めることを考える．微分の定義より $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \fallingdotseq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ だから，両辺に h をかけて整理すると

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$$

となり，微分を用いて近似計算ができる．しかし，一般に近似値を計算したとき，その値と真の値との誤差がどれくらいの範囲に収まっているかわからないと，近似値は本当の価値を持たない．次のように高次微分を用いると，誤差の大きさを統制しつつよりよい近似値を求めることができる．
さて，記述を簡単にするために $a = 0$ の場合のみ考える．関数 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする． $f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ であるから

$$\int_0^h f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_0^h = f(h) - f(0)$$

となる．これを書き直して

$$f(h) = f(0) + \int_0^h f'(x)\,dx \tag{1}$$

ここで，積分を（無理やり）部分積分を用いて計算する．部分積分の公式 $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ において， $u(x) = f'(x), v(x) = x - h$ と置くと

$$\int_0^h f'(x)\,dx = \Big[f'(x)(x-h)\Big]_0^h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx = f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx \tag{2}$$

したがって， (1) の右辺の積分を (2) の最右辺で置き換えることにより

$$f(h) = f(0) + f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx$$

が得られる．さらに $u(x) = f''(x), v(x) = \frac{1}{2}(x-h)^2$ とおくことにより

$$\int_0^h (x-h)f''(x)\,dx = -\frac{1}{2}f''(0)h^2 - \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$$

となる．これより，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$$

が得られる．さらに $u(x) = f'''(x), v(x) = \frac{1}{2\cdot 3}(x-h)^3$ とおく，というように繰り返していくと，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

が得られる．ここで， $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数である．これより， $f(h)$ は h の $n-1$ 次式で近似され，最後の積分が誤差であるとみることができる．そこで，この誤差項を

$$R_n(h) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

とおく．以後，$h > 0$ と仮定して，いま $f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，

$$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$$

が成り立つとする．（たとえば，最大値，最小値をそれぞれ M，m とすればよいが，必ずしも最大値・最小値を用いる必要はない.）このとき，各辺に $(h-x)^{n-1}$ を掛けて 0 から h まで積分すると，この積分区間内で $(h-x)^{n-1} \geqq 0$ だから，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^h (h-x)^{n-1} m\,dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} M\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^h (h-x)^{n-1} m\,dx = m\int_0^h (h-x)^{n-1}\,dx = m\Big[\frac{-1}{n}(h-x)^n\Big]_0^h = \frac{m}{n}h^n$ などから

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^n f^{(n-1)}(x)\,dx \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

が成り立つ．以上をまとめると次のようになる．

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，h を正の数とする．$f(h)$ は

$$f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

と近似でき，$f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$ をみたすとすると，その誤差 $R_n(h)$ は，次の不等式をみたす．

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

例．$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の近似式を用いる．ここでは $n = 3$，$h = 1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots$$

また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $3/8$ をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが，0 以上であることはすぐにわかる．この問題ではそれで十分である．）したがって，近似の誤差は，上の式を用いて

$$0 \leqq 8\,R_3\Big(\frac{1}{64}\Big) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\Big(\frac{1}{64}\Big)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる．

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)