

## 微分積分 II — 期末試験

2019 年 1 月 22 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可。
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと。これがない場合、大幅な減点をすることもある。

[1] 次の不定積分を求めよ。

$$\text{a) } \int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (x^2+1=t \text{ とおく.}) \quad \text{b) } \int (2x-1)\log x dx \quad (\text{部分積分})$$

[2]  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  とおく。a)  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  をそれぞれ計算せよ。b)  $h$  を正の実数とするととき,  $\sqrt[3]{1+h}$  を  $f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2$  で近似したときの誤差を評価せよ。c)  $\sqrt[3]{128} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}}$  という表示と b) の近似式を応用して  $\sqrt[3]{128}$  の近似値を計算せよ。また、このようにして得られた近似値と  $\sqrt[3]{128}$  の値とは小数第何位まで一致するといえるか。[3] a) 関数  $f(x) = e^x + \log(1-x) - 1$  の  $x=0$  のまわりでの漸近展開を 4 次の項まで求めよ。ただし、次の漸近展開の公式は自由に用いてよい。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

b) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \log(1-x) - 1}{x^3}$  を求めよ

[4] つぎの 2 変数関数について、2 階の偏微分までをすべて計算せよ。

$$\text{a) } f(x, y) = \log(x^2 + y) \quad \text{b) } f(x, y) = e^{xy^2}$$

[5] 関数  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$  の臨界点 (すべての偏微分が 0 になる点) をすべて求め、各臨界点において極大・極小を判定せよ。[6] ある地域の土地の価格と建物の価格は、広さ 1 平方メートルにつき、それぞれ 12 万円と 32 万円である。市場調査により、顧客の満足度は土地、建物の広さをそれぞれ  $x$ ,  $y$  平方メートルとするととき、 $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$  に比例することがわかっている。いま、5400 万円の予算をすべて使って家を建てたい顧客がいるとき、この顧客の満足度を最大にするには、土地と建物の広さをどれだけにするればよいか。Lagrange の乗数法を用いて求めよ。[7] 関数  $f(x)$  に対し、 $f(x)$  の  $x$  に関する弾力性  $\text{El}_x f(x)$  は  $\text{El}_x f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$  と定義される。a) 関数  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$  について、 $\text{El}_x f(x)$  を求めよ。b)  $x$  が  $x > 0$  の範囲を動くとき、 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$  が  $x$  に関して弾力的である、すなわち  $|\text{El}_x f(x)| > 1$  となる  $x$  の範囲を求めよ。