監督者検印	

1. 学籍番号・氏名は必ずインク又はボールペンで書くこと。監督者検印のない答案は無効。
2. 答案は必ず提出しなければならない。

解答用紙

年　月　日　時限目

科目		入学年度	学部	学科	組	号	検	氏名	成績	A B C D	E
担任											

1 a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　$t=x^2+1$ とおくと $\frac{dt}{dx}=2x \Rightarrow 2x\,dx=dt$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3+C$$

b) $\int (2x-1)\log x\,dx$　　$f(x)=x^2-x,\ g(x)=\log x$ とおくと $f'(x)=2x-1,\ g'(x)=\frac{1}{x}$

$$\int (2x-1)\log x\,dx = (x^2-x)\log x - \int (x^2-x)\times\frac{1}{x}\,dx = (x^2-x)\log x - \int (x-1)\,dx$$

$$= (x^2-x)\log x - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

2 a) $f(x)=\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}},\quad f'''(x)=+\frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

b) $\sqrt[3]{1+h} = f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+R_3(h) = 1+\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}h^2+R_3(h)$

0 と h の間の $f'''(x)$ の最大値は $\frac{10}{27}$（$x=0$ のとき）最小値は 0 より大

$$\therefore\ 0 < R_3(h) \leqq \frac{1}{3!}\times\frac{10}{27}\times h^3 = \frac{5}{81}h^3$$

c) $h=\frac{3}{125}$ とし　$\sqrt[3]{128} = 5\times\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}} = 5\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{125}-\frac{2}{9}\times\left(\frac{3}{125}\right)^2\right)+5R_3\left(\frac{3}{125}\right)$

$$0<5R_3(h) \leqq 5\times\frac{1}{3!}\times\frac{10}{27}\times\left(\frac{3}{125}\right)^3$$

$\therefore\ \sqrt[3]{128} = 5.0396800\cdots + 5R_3\left(\frac{3}{125}\right)$,　$5R_3\left(\frac{3}{125}\right) \leqq 0.000004266\cdots$

0.00000426…

$\therefore\ \sqrt[3]{128}$ の近似値 5.30968 は小数第5位まで正しい．

3 a)
$$e^x-1 = x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$$

$$+)\ \log(1-x) = -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$$

$$e^x+\log(1-x)-1 = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}-\frac{5}{24}x+o(x)\right) = -\frac{1}{6}$

（裏面へ）

ここから書くこと⇨

[4] a) $f(x,y) = \log(x^2+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y) - 2x \times (2x)}{(x^2+y)^2} = \frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$$

b) $f(x,y) = e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^4 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y\, e^{xy^2} + y^2 e^{xy^2} \times 2xy^3 = 2y(1+xy^2) e^{xy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x e^{xy^2} + 2xy \cdot e^{xy^2} \cdot 2xy = 2x(1+2xy^2) e^{xy^2}$$

[5] $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 12x = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$ を解く

②より $2y(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ または $y = 0$

(i) $x = -1$ のとき, ①より $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$ $\quad \therefore (x,y) = (-1,3), (-1,-3)$

(ii) $y = 0$ のとき ①より $3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4$ $\quad \therefore (x,y) = (0,0), (-4,0)$

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (6x+12)(2x+2) - (2y)^2 = 12(x^2+3x+2) - 4y^2$$

1° $(x,y) = (-1,3)$. $D(-1,3) = -36 < 0$ 鞍点

2° $(x,y) = (-1,-3)$. $D(-1,-3) = -36 < 0$ 鞍点

3° $(x,y) = (0,0)$, $D(0,0) = 24 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 > 0$ $(0,0)$ で極小

4° $(x,y) = (-4,0)$. $D(-4,0) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12 < 0$ $(-4,0)$ で極大

監督者 検印

1. 学籍番号・氏名は必ずインク又はボールペンで書くこと。監督者検印のない答案は無効。
2. 答案は必ず提出しなければならない。

解答用紙

年　月　日　時限目

科目		入学年度	学部	学科	組	号	検	氏名	成績	A B C D	E
担任											

$\boxed{6}$ 土地 $x\,m^2$, 建物 $y\,m^2$ の家を建てるとして. $12x+32y=5400$ という条件のもとで $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ を最大にすることを考える

$$L(x,y,\lambda)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-\lambda(12x+32y-5400)$$

とおき,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda\times 12 = 0 & \text{— ①} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda\times 32 = 0 & \text{— ②} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(12x+32y-5400) = 0 & \text{— ③} \end{cases}$$

を解く.

①,②より $\dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{\lambda\times12}{\lambda\times32} \Rightarrow \dfrac{y}{2x}=\dfrac{3}{8} \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x$

これを③に代入して $12x+32\times\frac{3}{4}x=5400 \Rightarrow x=\dfrac{5400}{36}=150$

$y=\frac{3}{4}\times150=112.5$

$\boxed{7}$ a) $El_x(e^{-\frac{1}{2}x}) = \dfrac{x(e^{-\frac{1}{2}x})'}{e^{-\frac{1}{2}x}} = \dfrac{-\frac{1}{2}x\cancel{e^{-\frac{1}{2}x}}}{\cancel{e^{-\frac{1}{2}x}}} = -\frac{1}{2}x$

b) $|El_x(e^{-\frac{1}{2}x})| = |-\frac{1}{2}x| > 1$

$x>0$ より $\frac{1}{2}x>1 \Rightarrow x>2$

(裏面へ)