2019年度前期　　微分積分 I　　火曜 2 限　鍬田 政人

復習問題　略解

$\boxed{1}$ $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h^2-4h}{4(2+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-4}{4(2+h)^2}=\frac{-4}{4\times 2^2}=-\frac{1}{4}$

$\boxed{2}$ a）$\displaystyle \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2}{3}$　　b）$\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$　　c）$y=2x-3$　　d）別紙参照

$\boxed{3}$ a）$\displaystyle \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-\sqrt{3}+1$　　b）$\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-1$　　c）$y=-x$　　d）別紙参照

$\boxed{4}$ a）別紙グラフより，$0<x<1$，$2<x$　　b）別紙グラフより，$x\leqq 1$

$\boxed{5}$ a）$(g\circ f)(x)=1+a-ax$，$(f\circ g)(x)=-\dfrac{x}{a}$.

b）$1+a-ax=x$ がすべての x になついて成り立たなければ行けないので，$a=-1$.（このとき $(f\circ g)(x)=x$ も成り立っていることに注意.）

$\boxed{6}$ a）定義域 $x\neq -2$, 値域 $y\neq 2$；逆関数 $f^{-1}(x)=-\dfrac{2x+1}{x-2}$，逆関数の定義域 $x\neq 2$, 値域 $y\neq -2$.

b）定義域 $x\leqq 2$, 値域 $y\leqq 0$；逆関数 $f^{-1}(x)=2-x^2$，逆関数の定義域 $x\leqq 0$, 値域 $y\leqq 2$.

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a）$f'(x)=3(4x+5)(2x^2+5x-6)^2$

b）$f'(x)=(x-1)^4+4x(x-1)^3$

c）$f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2-3)^3}$

d）$f'(x)=\dfrac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

e）$f'(x)=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{2-x}}$

f）$f'(x)=-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x+4)^4}}$

g）$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

h）$f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

i）$f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$\boxed{8}$ a)

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

b）極大：$x=-\dfrac{3}{2}$，極小：なし［$f'(0)=0$ であるが，$x=0$ では極小でも極大でもないことに注意.］

変曲点：$x=-1, 0$.

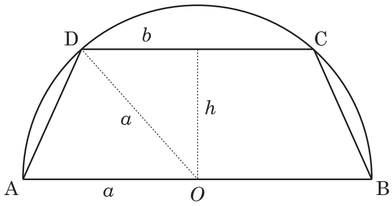
【裏につづく】

$\boxed{9}$ 別紙グラフ参照

$\boxed{10}$ a) 最大値 $\sqrt{2}$（$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき），最小値 -1（$x = -1$ のとき）.

b) 最大値 $e^{-2} = 0.135335\ldots$（$x = 1$ のとき），最小値 -1（$x = 0$ のとき）.

$\boxed{11}$ 台形の高さを h とし，上底の長さ（辺 CD の長さ）を $2b$ とおくと，図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ.



したがって，$b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる．このとき，$S = \dfrac{2a + 2b}{2}h$ であるから，$S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$.

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$\dfrac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが，$a\sqrt{a^2 - h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を２乗して整理することにより，$4h^4 = 3a^2h^2$ を得る．$h > 0$ であることに注意して $\dfrac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき．$0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば（省略），$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり，S の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\boxed{12}$ a) $x > 0$

b)

x	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	最大	$\searrow$

c) $f(x)$ は $x = e$ で最大なので，$f(\pi) < f(e)$. これより，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$.

d) c) で得られた不等式の両辺に $e\pi$ をかけて整理すると $\log \pi^e < \log e^\pi$．これより，$\pi^e < e^\pi$.

$\boxed{13}$ a) $S = \dfrac{1}{2}(x - 1)\sqrt{1 - x^2}$

b) $S' = -\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2} - \dfrac{(1 - x)x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{(1 - x)(1 + 2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

増減表より，最大値は $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

2019 年 7 月 9 日