入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

a を 1 でない正の定数とするとき，a を底とする x の指数関数 $f(x)=a^x$ の導関数を求めたい．いま，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^xa^h-a^x}{h}=\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$$

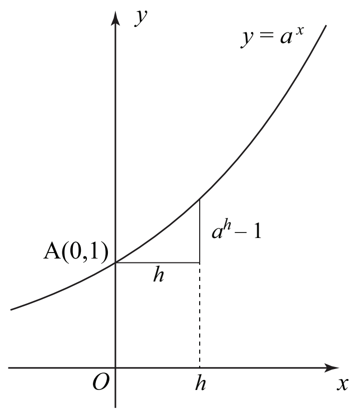
であるから，

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

となる．ここで，右の図において

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

というのは，曲線 $y=a^x$ の上の点 $\mathrm{A}(0,1)$ における接線の傾きにほかならない．いま，それを m_a で表すことにすれば，(1) から



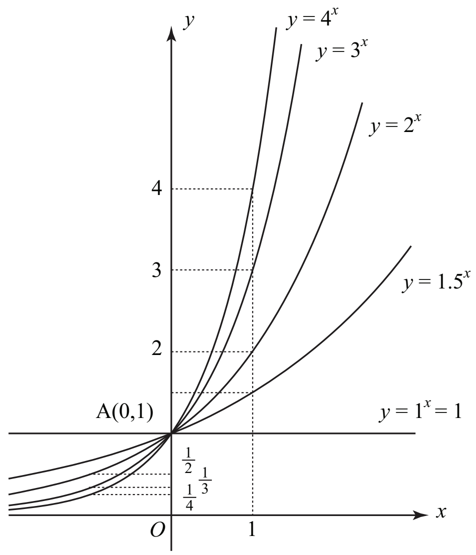
(2) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a^x\cdot m_a$$

ということになる．

さて，右の図からわかるように，曲線 $y=a^x$ の上の点 $\mathrm{A}(0,1)$ における接線の傾き m_a は，a が大きくなるほど大きくなる．前回の数値計算で見たとおり、

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\fallingdotseq 0.693\ldots\qquad \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\fallingdotseq 1.099\ldots$$

であった．したがって，ちょうど $m_a=1$ となるような a の値が 2 と 3 の間にちょうど一つあるだろうと考えられる．いま，$m_a=1$ となるような a の値を e という文字で表し，Nepier の数とか，自然対数の底と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である．



(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

すると (2) から，$f(x)=e^x$ ならば $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}e^x\cdot\dfrac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$ が得られる．

指数関数の e^x の導関数：　$\left(e^x\right)'=e^x$

$\boxed{1}$ 極限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ を用いて関数 $f(x)=xe^x$ の導関数を定義を直接用いて求めよ．

$\boxed{2}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a}=a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$ である．そこで，$y=e^u$，$u=(\log a)x$ とおいて，合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意．］

$\boxed{3}$ $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．そこで，$f'(x)=e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x)=\log x$ の導関数が $\dfrac{1}{x}$ であること，すなわち $\left(\log x\right)'=\dfrac{1}{x}$ であることを示せ．

4 前問によれば，$f(x) = \log x$ としたとき，$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log(1+h)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

である．（最後の等号は log が連続関数なので log と $\lim\limits_{h\to 0}$ の順序が入れ替えらることによる．）したがって，

$$f'(1) = \log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = 1$$

となり，$\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は log をとると 1 になるような値，すなわち，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

となる．次の表は $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算するためのものである．$h = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^6}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

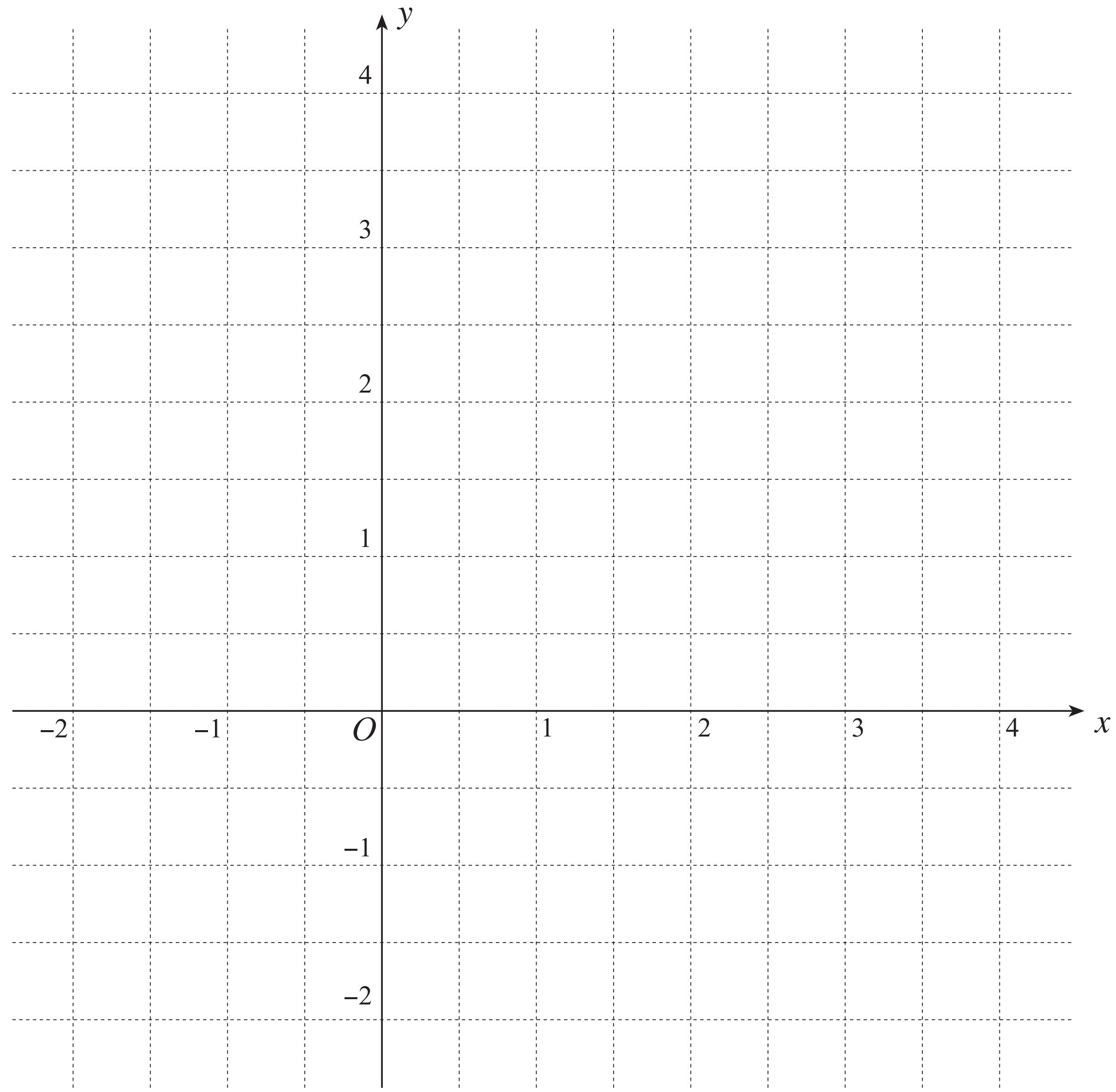
h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1+1)^1 = 2.$
$\frac{1}{10}$	$(1+0.1)^{10} = 2.5937424\ldots$
$\frac{1}{100}$	$(1+0.01)^{100} =$
$\frac{1}{1000}$	$=$
$\frac{1}{10000}$	$=$
$\frac{1}{10^5}$	$=$
$\frac{1}{10^6}$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$
0	

これより，$e = \boxed{}$ と推測される．

5 関数 $y = e^x$ について，いろいろな x に対する y の値は次の表のようになる．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して，指数関数 $y = e^x$ のグラフを描き，そのグラフの $(0,1)$ における接線を引いてみよ．また，対数関数 $y = \log x$ は $y = e^x$ の逆関数であることを用い，$y = \log x$ のグラフを描き，$(1,0)$ における接線を引いてみよ．



担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)