2018年7月24日

微分積分Ⅰ（火曜2限）	入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
期末試験							氏名	

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．

a) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

$$\text{平均変化率} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+(1+h)^2}-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{2-(1+(1+h)^2)}{2(1+(1+h)^2)} = \frac{1}{h}\,\frac{-2h-h^2}{2(1+(1+h)^2)}$$

$$= \frac{-2-h}{2(1+(1+h)^2)} \quad \left(= \frac{-2-h}{2(2+2h+h^2)}\right)$$

b) $f(x)$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ を極限による定義を用いて直接計算せよ．

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2-h}{2(1+(1+h)^2)}$$

$$= \frac{-2}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$$

2 $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ でなければいけないので

$4-x^2 \geqq 0 \iff -2 \leqq x \leqq 2$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ．

$$f'(x) = (2-x)'\sqrt{4-x^2} + (2-x)\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + \frac{(2-x)\times(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-(4-x^2)-x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(x-2)(x+1)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ．

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)(x+1)}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = -1,\ 2$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．

x	-2		-1		2
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

e) $f(x)$ が定義される範囲内での最大値・最小値を求めよ．

最大値 $3\sqrt{3}$ $(x=-1)$

最小値 0 $(x=-2,\ 2)$

3 $f(x) = \sqrt{4x-2}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y=f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$4x-2 \geqq 0$ より $x \geqq \frac{1}{2}$

値域：$y \geqq 0$

b) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を求めよ．

$y=\sqrt{4x-2}$ の両辺を2乗して $y^2 = 4x-2$

x について解いて $x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

ここで x と y を入れ換えて $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

したがって $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

定義域：$x \geqq 0$

値域：$y \geqq \frac{1}{2}$

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．［定義に戻る必要はない．］

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x-2}\right)' = \left((4x-2)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{-\frac{1}{2}} \times (4x-2)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-2}}$$

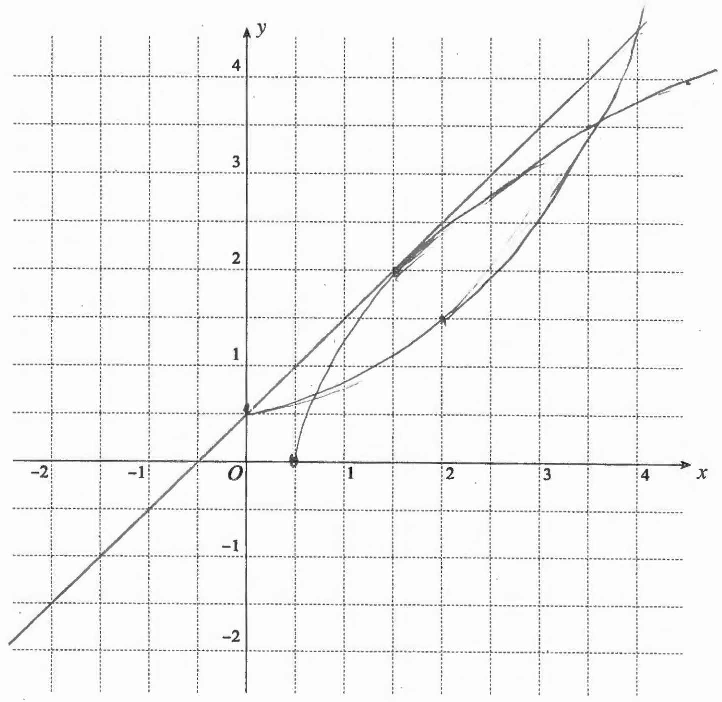
d) $y=f(x)$ のグラフの $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ における接線の方程式を求めよ．

$$f'\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{4\times\frac{3}{2}-2}} = \frac{2}{2} = 1$$

よって接線の方程式は $y-2 = 1\times\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore\ y = x + \frac{1}{2}$

e) $y=f(x)$ のグラフ，$y=f(x)$ の $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ における接線，逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフの3つを右上の座標平面内に描け．



【裏面につづく】

4 $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x-1}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

$2x-1 \neq 0$ より　$x \neq \frac{1}{2}$

b) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を求めよ.

$y=\frac{3x-4}{2x-1} \Rightarrow (2x-1)y=3x-4$

$\Rightarrow 2yx-3x=y-4$

$\Rightarrow x=\frac{y-4}{2y-3}$

ここで x と y を入れ換え $y=\frac{x-4}{2x-3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2x-3}$　定義域は $x \neq \frac{3}{2}$

c) $y=f(x)$ および，$y=f^{-1}(x)$ の値域を求めよ.

$y=f(x)$ の値域　$y \neq \frac{3}{2}$

$y=f^{-1}(x)$ の値域　$y \neq \frac{1}{2}$

d) $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ が成り立つことを確かめよ.

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{3x-4}{2x-1}\right)$

$=\dfrac{\frac{3x-4}{2x-1}-4}{2\frac{3x-4}{2x-1}-3}=\dfrac{3x-4-4(2x-1)}{2(3x-4)-3(2x-1)}$

$=\dfrac{-5x}{-5}=x$

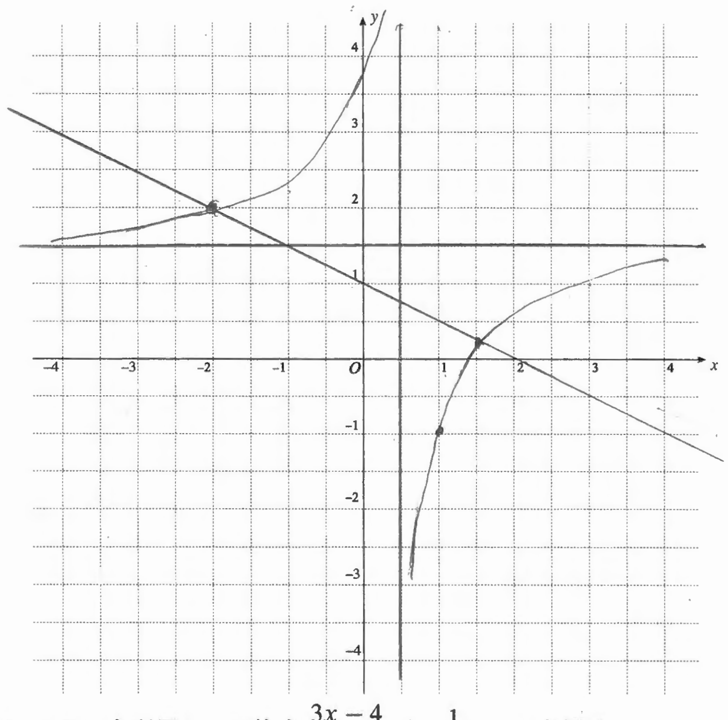
e) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ の交点を求めよ.

$\frac{3x-4}{2x-1}=-\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow 3x-4=(2x-1)(-\frac{1}{2}x+1)$

$x^2+\frac{1}{2}x-3=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+2)(2x-3)=0$

$\Rightarrow x=-2, \frac{3}{2}$　$\therefore (-2, 2), (\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$

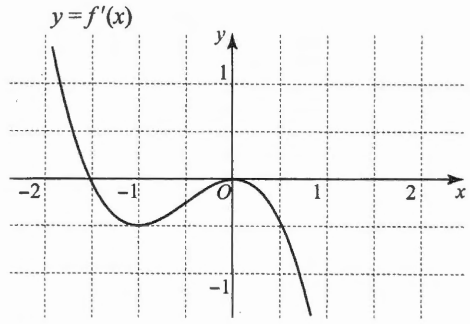
f) $y=f(x)$ のグラフおよび直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ を下の座標平面内に描け.



g) グラフを利用して不等式 $\dfrac{3x-4}{2x-1} \leqq -\dfrac{1}{2}x+1$ を解け.

グラフより $x \leqq -2$ または $\frac{1}{2} < x \leqq \frac{3}{2}$

5 下の図はある関数 $f(x)$ について，その導関数のグラフ $y=f'(x)$ の概形を示したものである.



a) 上の図をもとに，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べよ.（凹凸は曲がった矢印 ↗ ↗ ↘ ↘ で表すこと.）

x	…	$-\frac{3}{2}$	…	-1	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	変曲点	↘

b) 関数 $f(x)$ が極大，極小となる x の値と，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ.

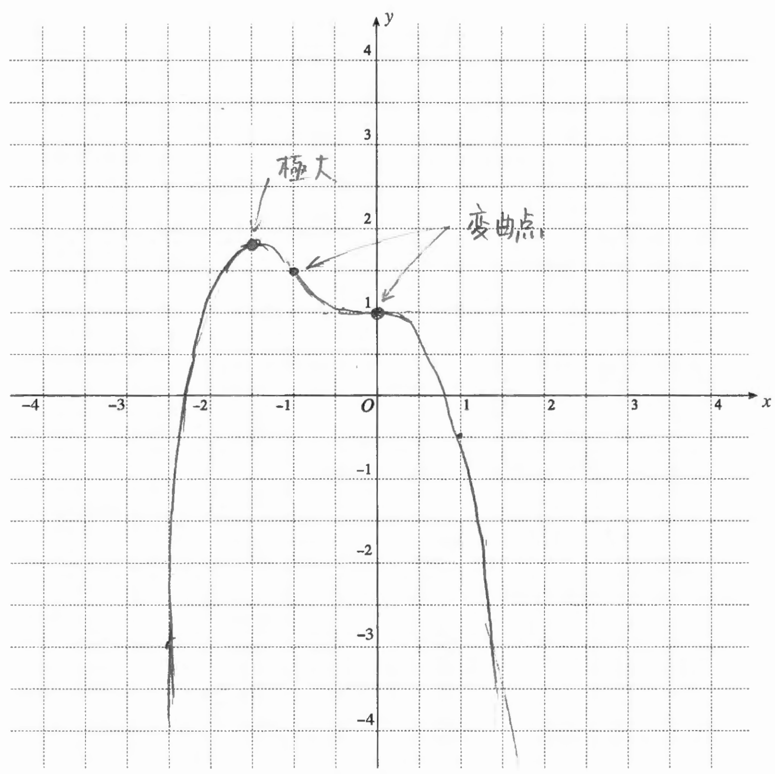
極大：$x=-\frac{3}{2}$

極小：なし

変曲点：$x=-1, 0$

c) さらに，$f(x)$ の値が下の表に示されているとおりとする．このとき，$y=f(x)$ のグラフを可能な限り忠実に描き，極大・極小点および変曲点を示せ.

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	-3	1	1.84	1.5	1	-0.5	-5



微分積分 I（火曜 2 限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

$\boxed{6}$ $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

$1+x^2$ は常に正だから $\frac{1}{1+x^2}$ も常に正

したがって $f(x)$ はすべての実数で定義される．

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \left(-\log(1+x^2)\right)' = -\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$$

$$= \frac{-2x}{1+x^2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f'(x)=0 \iff -2x=0 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff -2x>0 \iff x<0$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)' = -\frac{2(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(1+x^2-x\times 2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f''(x)=0 \iff -2(1-x^2)=0 \iff x=\pm 1$

$f''(x)>0 \iff -2(1-x^2)>0 \iff x^2-1>0$

$\iff x<-1$ または $x>1$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ↗ ↗ ↘ ↘ で表すこと．）

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ．

極大：$x=0$

極小：なし

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x=-1, 1$

$\boxed{7}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = xe^{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = (x)'e^{\sqrt{1-x^2}} + x\left(e^{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$

$$= e^{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'e^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= e^{\sqrt{1-x^2}} + x\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{-(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

c) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x-(x)'\log x}{x^2}$$

$$= \frac{1-\log x}{x^2}$$

— 以上 —