入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

1　a) 初項 a，公比 x の無限等比級数の和は

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

となる．この両辺を x で微分し，さらに両辺に x を掛けることにより，

$$ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots = \frac{ax}{(1-x)^2}$$

であることを示せ．

それぞれの辺の微分は

$$\left(a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots\right)' = a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots$$

$$\left(\frac{a}{1-x}\right)' = \left(a(1-x)^{-1}\right)' = -a((1-x)^{-2}(1-x)' = a(1-x)^{-2} = \frac{a}{(1-x)^2}$$

したがって

$$a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots = \frac{a}{(1-x)^2}$$

両辺に x をかけて

$$ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots = \frac{ax}{(1-x)^2}$$

b) 同様にして，上の式から $ax + 2^2ax^2 + 3^2ax^3 + \cdots + k^2ax^k + \cdots$ を求めよ．

a) の結果のそれぞれの辺の微分は

$$\left(a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots\right)' = a + 2^2ax + 3^3ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots$$

$$\left(\frac{ax}{(1-x)^2}\right)' = \left(ax(1-x)^{-2}\right)' = a(1-x)^{-2} - 2ax(1-x)^{-3}(1-x)'$$

$$= a(1-x)^{-3}\left((1-x) + 2x\right) = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3}$$

したがって

$$a + 2^2ax + 3^3ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3}$$

両辺に x をかけて

$$ax + 2^2ax^2 + 3^3ax^3 + \cdots + k^2ax^k + \cdots = \frac{ax(1+x)}{(1-x)^3}$$

2　「確率 p で成功，確率 $q = 1 - p$ で失敗」という試行を何回も繰り返すとき，最初に成功するまでに失敗する回数を X とする．すなわち、確率変数 X は

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	計
P	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^k	$\cdots$	1

という確率分布を持つとする．

a) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$\boxed{1}$ a) より

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \cdots + kpq^k + \cdots = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

（ここで，$q = 1 - p$ より，$1 - q = p$ であることを用いた．）

b) X の分散 $V(X)$ を，公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いて求めよ．

$\boxed{1}$ b) より

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq + 2^2pq^2 + 3^2pq^3 + \cdots + k^2pq^k + \cdots$$

$$= \frac{pq(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{pq(1+q)}{p^3} = \frac{q(1+q)}{p^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{q(1+q)}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q + q^2 - q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$\boxed{3}$ ある打者は，1 回の打席でヒットを打つ確率が 3 割であるとする.

a) 【復習】この打者が 10 回打席に入ったとき，ヒットを打つ回数の期待値と分散を求めよ.

ヒットを打つ回数 X は $B(10, 0.3)$ に従うので，

$$E(X) = np = 10 \times 0.3 = 3$$
$$V(X) = npq = 10 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 2.1$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.1} \fallingdotseq 1.449$$

b) この打者がはじめてヒットを打つまでに凡退する回数の期待値と分散を求めよ.

ヒットを打つまでに凡退する回数 Y は $\boxed{2}$ の分布（幾何分布という）に従うので，

$$E(Y) = \frac{q}{p} = \frac{1-0.3}{0.3} = 2.333\ldots$$
$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-0.3}{0.3^2} = 7.777\ldots$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7.777\ldots} \fallingdotseq 2.789$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)