1　1枚の硬貨を続けて5回投げるとき，表の出る回数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を定義にしたがって求めよ．

$$E(x) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 2\times\frac{10}{32} + 3\times\frac{10}{32} + 4\times\frac{5}{32} + 5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{80}{32} = \frac{5}{2} \quad (=2.5)$$

c) 分散 $V(X)$ は $E(X)=\mu$ とおいて $V(X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 p_k$ と定義されるのであった．この定義を直接用いて $V(X)$ を計算せよ．

$$V(x) = \left(0-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{32} + \left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{32} + \left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32} + \left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32}$$

$$+ \left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{32} + \left(5-\frac{5}{2}\right)^5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{25}{4}\times\frac{1}{32}\times 2 + \frac{9}{4}\times\frac{5}{32}\times 2 + \frac{1}{4}\times\frac{10}{32}\times 2$$

$$= \frac{160}{4\times 32} = \frac{5}{4}$$

d) 確率変数 X^2 の確率分布を求めよ．

X^2	0	1	4	9	16	25	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

e) 確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2)-E(X)^2$ を計算し，$E(X^2)-E(X)^2 = V(X)$ であることを確かめよ．

$$E(x^2) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} \times 4\times\frac{10}{32} + 9\times\frac{10}{32} + 16\times\frac{5}{32} + 25\times\frac{1}{35}$$

$$= \frac{240}{32} = \frac{15}{2}$$

$E(x^2) - E(x)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$　　これは c) で得た $V(x)$ と一致

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

2　X は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ という値をとる確率が，それぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるような確率変数であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．いま，a, b を定数とするとき，確率変数 Y を $Y = (aX+b)^2$ と定義する．Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$(ax_1+b)^2$	$(ax_2+b)^2$	$\cdots$	$(ax_k+b)^2$	$\cdots$	$(ax_n+b)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), E(X^2), a, b$ を用いて表せ．

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n}(ax_1+b)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n}(a^2x_1^2 + 2abx_1 + b^2)p_k$$

$$= a^2\sum_{k=1}^{n} x_1^2 p_k + 2ab\sum_{k=1}^{n} x_1 p_k + b^2\sum_{k=1}^{n} p_k$$

$$= a^2 E(x^2) + 2ab\,E(x) + b^2$$

b) X の分散の定義は $\mu = E(X)$ として，$V(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$ と表すことができる．a) の結果を用いて $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことを証明せよ．

a) で $a=1$，$b=-\mu$ とすると

$$E((x-\mu)^2) = E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2$$

$$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

$$\therefore V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

【裏に続く】

3 2個のサイコロを投げるとき，出た目の数のうち大きくない方を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$E(X) = 1\times\frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{91}{36}$$

$$E(X^2) = 1\times\frac{11}{36} + 4\times\frac{9}{36} + 9\times\frac{7}{36} + 16\times\frac{5}{36} + 25\times\frac{3}{36} + 36\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{301}{36}$$

$$V(X) = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{2555}}{36}$$

4 1から6までの番号をつけた6枚のカードがある．この中から同時に2枚のカードを引くとき，引いたカードの番号の大きい方を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$E(X) = 2\times\frac{1}{15} + 3\times\frac{2}{15} + 4\times\frac{3}{15} + 5\times\frac{4}{15} + 6\times\frac{5}{15}$$

$$= \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

$$E(X^2) = 4\times\frac{1}{15} + 9\times\frac{2}{15} + 16\times\frac{3}{15} + 25\times\frac{4}{15} + 36\times\frac{5}{15}$$

$$= \frac{350}{15} = \frac{70}{3}$$

$$V(X) = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{210-196}{9} = \frac{14}{9}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)