1 ある大学では学生の数学と英語の成績の分布が次の表の通りであった．

数学＼英語	A	B	C
A	15%	15%	5%
B	10%	20%	10%
C	5%	10%	10%

いま，A= 4 点，B= 3 点，C= 2 点とし，数学と英語の平均点を X とする．すなわち，数学と英語の成績が，例えば (B,A) であれば，$X\big((\mathrm{B},\mathrm{A})\big) = (3+4)/2 = 3.5$ と定義する．

a) X の値として可能なものすべてを挙げよ．

2, 2.5, 3, 3.5, 4

b) X の値が 3 となる事象 M を求めよ．また，確率 $P(M)$ を求めよ．

$M = \{(A,C), (B,B), (C,A)\}$

$P(M) = P(\{(A,C)\}) + P(\{(B,B)\}) + P(\{(C,A)\})$

$= 0.05 + 0.20 + 0.05 = 0.30$

c) 次の表を完成させよ．

X	2	2.5	3	3.5	4	計
P	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1	1

d) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$E(X) = 2\times0.15 + 2.5\times0.25 + 3\times0.3 + 3.5\times0.2 + 4\times0.1$

$= 2.925$

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

2 2 個のサイコロを投げるとき，出た目の数の差の絶対値を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を定義にしたがって求めよ．

$E(X) = 0\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 2\times\frac{8}{36} + 3\times\frac{6}{36} + 4\times\frac{4}{36} + 5\times\frac{2}{36}$

$= \frac{1}{36}(10+16+18+16+10) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

c) 確率変数 X^2 の確率分布を求めよ．

X^2	0	1	4	9	16	25	計
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

d) 確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2) - E(X)^2$ を計算せよ．

$E(x^2) = \frac{1}{36}(10+32+54+64+50) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$

$E(x^2) - E(x)^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324}$

【裏に続く】

3 X は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ という値をとる確率が，それぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるような確率変数であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．いま，a, b を定数とするとき，確率変数 Y を $Y = aX + b$ と定義する．Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\cdots$	$ax_k + b$	$\cdots$	$ax_n + b$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), a, b$ を用いて表せ．

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b) p_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a x_k p_k + b p_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a x_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b p_k$$

$$= a \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}_{= E(X)} + b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k}_{= 1}$$

$$= aE(X) + b$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

4 2013 年の年末ジャンボ宝くじは総計 600,000,000 枚（6 億枚）発行され，当選金額と当選本数は以下の通りであった．この宝くじの期待値を求めよ．（必要なら電卓等を用いてよい．）

等級	当選金額	当選本数
1 等	500,000,000 円	60 本
1 等の前後賞	100,000,000 円	120 本
1 等の組違い賞	100,000 円	5,940 本
2 等	1,000,000 円	1,800 本
3 等	3,000 円	6,000,000 本
4 等	300 円	60,000,000 本
大晦日特別賞	50,000 円	180,000 本

(5億 × 60 + 1億 × 120 + 10万 × 5940 + 100万 × 1800
+ 3千 × 6百万 + 300 × 6千万 + 5万 × 18万) ÷ 6億

= (300 + 120 + 5.94 + 18 + 180 + 180 + 90) 億 ÷ 6億

= 148.99