基礎数学 B1（火曜 4 限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

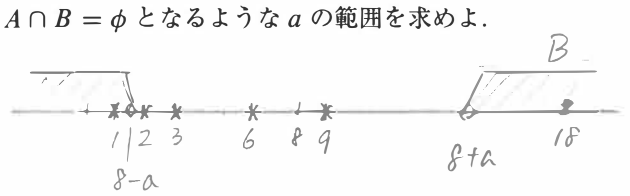
$\boxed{1}$ 実数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合 A, B を
- $A = \{x \mid x$ は 18 の正の約数 $\}$
- $B = \{x \mid |x-8| > a\}$

と定める．ただし，a は正の実数とする.

a) A を外延的記法（要素をすべて並べて表す表し方）によって表せ.

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) $A \cap B = \phi$ となるような a の範囲を求めよ.



$A \cap B = \phi$ となるのは $8-a \leq 1$ かつ $8+a \geq 18$ のとき

したがって　$a \geq 10$ のとき

c) $A \subset B$ となるような a の範囲を求めよ.

上の図を参照し

$A \subset B$ となるのは $8-a < 6$ かつ $8+a < 9$ のとき

したがって $a < 1$ のとき

$\boxed{2}$ 10 円，50 円，100 円，500 円の 4 種類の硬貨が 1 枚ずつある．この 4 枚から無作為に 1 枚を選んで投げるという試行を考える．硬貨の表が出ることを H，裏が出ることを T で表し，たとえば選んだ硬貨が 50 円玉で，表が出たという結果を (50, H) という記号で表すとする.

a) この試行の標本空間 Ω を上の記号を用いて表せ.

$\Omega = \{(10,H), (10,T), (50,H), (50,T),$
$(100,H), (100,T), (500,H), (500,T)\}$

b) Ω の要素の個数，およびこの試行におけるすべての事象の個数を求めよ.

$n(\Omega) = 8$

事象の個数 $= 2^8 = 256$

c) 「金額が 50 円以上の硬貨を選び，表が出る」という事象を A とする．A を表す集合を外延的記法によって表せ.

$A = \{(50,H), (100,H), (500,H)\}$

d) 「金額が 100 円以下の硬貨を選ぶ」という事象を B とするとき，$A \cap B$ を表す集合を外延的記法によって表せ.

$A \cap B = \{(50,H), (100,H)\}$

e) 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ を求めよ.

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

f) 事象 A と事象 B は独立であるかどうかを判定せよ.

$P(A)P(B) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{32}$

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ だから　A と B は独立ではない

$\boxed{3}$ 箱には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．箱の中から無作為に 1 個の玉を選び，その玉を元へ戻さずもう 1 個の玉を無作為に選ぶ.
- 1 個目に選んだ玉が赤であるという事象を A,
- 2 個目に選んだ玉が 1 個目の玉と同じ色であるという事象を B

とする.

a) $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$ をそれぞれ求めよ.

$P_A(B) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{5}{9}$

b) $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ を求めよ.

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$

c) それぞれの確率を表す次の表を完成させよ.

1 個目 ＼ 2 個目	同じ色（B）	異なる色（$\overline{B}$）	計
赤（A）	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$
白（$\overline{A}$）	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{5}$
計	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$	1

d) $P(B)$ を求めよ.

$P(B) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15}$

e) 2 個目の玉が 1 個目と同じ色であったとき，最初の玉が赤である確率を求めよ.

もとめる確率 $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \dfrac{2}{7}$

4 ある野球選手が打席に立ったときヒットや四球などで出塁する確率はちょうど4割であるという．この選手が1シーズン600回打席に立ったとして，出塁した回数を X とする．X の期待値と分散を求めよ．

$X \sim B(600, 0.4)$

$E(X) = 600 \times 0.4 = 240$

$V(X) = 600 \times 0.4 \times (1-0.4) = 144$

5 袋の中に赤玉3個と白玉4個が入っている．この袋から同時に3個の玉を取り出すとき，その中に含まれる赤玉の個数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

b) 確率変数 X の期待値と標準偏差を求めよ．

$E(X) = \frac{1}{35}(1\times18 + 2\times12 + 3\times1) = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$

$E(X^2) = \frac{1}{35}(1\times18 + 4\times12 + 9\times1) = \frac{75}{35} = \frac{15}{7}$

$V(X) = \frac{15}{7} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{105-81}{49} = \frac{24}{49}$

$\sigma(X) = \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

c) 確率変数 Y を1次式 $Y = aX + b$ で定める．ただし，a，b は定数で，$a > 0$ とする．Y の期待値が0，分散が1となるような a，b の値を求めよ．

$E(Y) = aE(X) + b = \frac{9}{7}a + b = 0$ — ①

$V(Y) = a^2V(X) = \frac{24}{49}a^2 = 1$ — ②

②より $a = \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12}$

①より $b = -\frac{9}{7} \times \frac{7\sqrt{6}}{12} = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$

6 原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．硬貨を2枚同時に投げ，2枚とも表が出たならば P は $+2$ だけ移動し，そうでなければ -1 だけ移動する．硬貨を20回投げ終わったとき，2枚とも表が出た回数を X とし，そのときの点 P の座標を Y とする．以下の問いに答えよ．

a) X は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表せ．

$X \sim B(20, \frac{1}{4})$

b) X の期待値，分散を求めよ．

$E(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$

$V(X) = 20 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

c) X と Y の関係を式で表せ．

$Y = 2X + (-1)(20-X)$

$\therefore Y = 3X - 20$

d) Y の期待値，分散を求めよ．

$E(Y) = E(3X-20) = 3E(X) - 20 = 15 - 20 = -5$

$V(Y) = V(3X-20) = 9V(X) = \frac{135}{4}$

—以上—