

入学年度	学部	学科	組	番号	校	フリガナ
						氏名

1 次の二項分布の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

a) $B(12, \frac{1}{4})$

$$\text{平均 } \mu = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\text{分散 } \sigma^2 = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{標準偏差 } \sigma = \frac{3}{2}$$

b) $B(9, \frac{1}{2})$

$$\mu = \frac{9}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{9}{4}$$

$$\sigma = \frac{3}{2}$$

c) $B(8, \frac{2}{3})$

$$\mu = \frac{16}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{16}{9}$$

$$\sigma = \frac{4}{3}$$

2 次の確率変数 X は二項分布に従う. X を $B(n, p)$ の形に表し, X の期待値, 標準偏差を求めよ.

a) 1枚の硬貨を10回投げるとき, 表が出る回数 X .

$$X \sim B(10, \frac{1}{2})$$

$$E(X) = 5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

b) 不良率3%の製品の山から50個取り出したときの不良品の個数 X .

$$X \sim B(50, 0.03)$$

$$E(X) = 1.5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1.455} \doteq 1.21$$

3 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき, 次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ.

a) $Y = 3X - 2$

$$X \sim B(100, 0.2) \text{ より } E(X) = 20, V(X) = 16$$

$$E(Y) = 3E(X) - 2 = 58$$

$$V(Y) = 9V(X) = 144$$

b) $Y = -X$

$$E(Y) = -E(X) = -20$$

$$V(Y) = (-1)^2 V(X) = 16$$

c) $Y = \frac{X - 20}{4}$

$$E(Y) = \frac{E(X) - 20}{4} = 0$$

$$V(Y) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X) = 1$$

4 a, b は定数で, $a > 0$ とする. 確率変数 X の期待値が5, 分散が100であるとき, 1次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が0, 分散が1となるように, a, b の値を定めよ.

$$E(Y) = aE(X) + b = 5a + b$$

$$V(Y) = a^2 V(X) = 100a^2$$

$$\begin{cases} 5a + b = 0 \\ 100a^2 = 1 \end{cases} \text{ を解いて, } a = \frac{1}{10}, b = -\frac{1}{2}$$

5 数直線上に針を立て、硬貨を投げて、表が出たら針を正の方向に1だけ動かし、裏が出たら針を負の方向に1だけ動かす。最初に針を原点に立てておき、硬貨を6回投げた後の針の座標を X とする。また、第 k 回目に表が出ると1、裏が出ると-1となる確率変数を X_k とすると、 X_1, \dots, X_6 は互いに独立であつて、 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ と表せる。次の問に答えよ。

a) 第 k 回目に表が出ると1、裏が出ると0となる確率変数を Y_k とする。 X_k を Y_k で表せ。

$(x, y) = (1, 1), (-1, 0)$ を通る直線を考えると、 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ だから

$$X_k = 2Y_k - 1$$

b) $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_6$ は二項分布に従う。その分布を $B(n, p)$ の形で表せ。

$$Y \sim B(6, \frac{1}{2})$$

c) X を Y を用いて表せ。

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \dots + X_6 = (2Y_1 - 1) + \dots + (2Y_6 - 1) \\ &= 2Y - 6 \end{aligned}$$

d) X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

$$Y \sim B(6, \frac{1}{2}) \text{ より } E(Y) = 3, V(Y) = \frac{3}{2}$$

$$E(X) = 2E(Y) - 6 = 0$$

$$V(X) = 2^2 V(Y) = 6$$

6 2個のサイコロを同時に投げるとき、同じ目が出るならば20点を得、異なる目が出るならば2点を失うという。これを15回繰り返したとき、得点の合計の期待値と標準偏差を求めよ。

2個のサイコロを同時に投げる試行を15回繰り返したとき、

同じ目が出る回数 X とすると、 $X \sim B(15, \frac{1}{6})$

問題のルールに従ったときの得点を Y とすると、

$$\begin{aligned} Y &= 20X + (-2)(15 - X) \\ &= 22X - 30 \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}, \sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$E(Y) = 22 \times \frac{5}{2} - 30 = 25$$

$$\sigma(Y) = 22\sigma(X) = \frac{55\sqrt{3}}{3}$$