

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1) さいころを2回続けて投げるとき、最初に出た目の数を X_1 、2回目に出た目の数を X_2 とする。

a) 確率変数 X_1 の期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ を求めよ。

$$E(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V(X_1) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

b) 確率変数 Y を X_1 と X_2 の和とする。すなわち、 $Y = X_1 + X_2$ とする。 Y の確率分布を求めよ。

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求め、 $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ であることを確かめよ。

$$E(Y) = \frac{1}{36}(2 \times 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

$$E(X_2) = E(X_1) = \frac{7}{2} \quad \therefore E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 = E(Y)$$

d) 確率変数 Y の分散 $V(Y)$ を定義にしたがって求め、 $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ であることを確かめよ。

$$V(Y) = \frac{1}{36}((2-7)^2 + (3-7)^2 \times 2 + (4-7)^2 \times 3 + (5-7)^2 \times 4 + (6-7)^2 \times 5 + (7-7)^2 \times 6 + (8-7)^2 \times 5 + (9-7)^2 \times 4 + (10-7)^2 \times 3 + (11-7)^2 \times 2 + (12-7)^2)$$

$$= \frac{1}{36}(25 + 32 + 27 + 16 + 5) \times 2 = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

$$V(X_2) = V(X_1) = \frac{35}{12} \quad \therefore V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} = V(Y)$$

e) 次に、確率変数 Z を X_1 と X_2 の積とする。すなわち、 $Z = X_1 X_2$ とする。 Z の確率分布を求めよ。

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

f) 確率変数 Z の期待値 $E(Z)$ を求め、 $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ。

$$E(Z) = \frac{1}{36}(1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 4 + 8 \times 2 + 9 \times 1 + 10 \times 2 + 12 \times 4 + 15 \times 2 + 16 \times 1 + 18 \times 2 + 20 \times 2 + 24 \times 2 + 25 \times 1 + 30 \times 2 + 36 \times 1)$$

$$= \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

$$E(X_1)E(X_2) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = E(Z)$$

2] 独立な確率変数 X と Y について, $E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ. この性質を既知として, 独立な確率変数 X と Y について, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ. [分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いるとよい.]

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + 2 \underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_0 + E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

" $\because X, Y$ 独立

3] 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5 , 確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり, X と Y が互いに独立であるとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

$$E(X) = -3, \quad V(X) = 5$$

$$E(Y) = 2, \quad V(Y) = 4$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -3 + 2 = -1$$

X, Y 独立より

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 5 + 4 = 9$$

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{9} = 3$$

4] a) さいころを 1 回投げるとき, 1 の目が出ると $X = 1$, それ以外の目が出ると $X = 0$ とする. 確率変数 X の期待値と分散を求めよ.

X	1	0	合計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき, 1 の目が出る回数を Y とする. このとき, 第 k 回目に 1 の目が出ると 1, それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると, 各 X_k は a) と同じ分布にしたがい, X_1, \dots, X_5 は互いに独立であって, $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる. これを用いて, 確率変数 Y の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + V(X_5)$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$