

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

$a$  を 1 でない正の定数とすると、 $a$  を底とする  $x$  の指数関数  $f(x) = a^x$  の導関数を求めたい。いま、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

であるから、

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

となる。ここで、右の図において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

というのは、曲線  $y = a^x$  の上の点  $A(0, 1)$  における接線の傾きにほかならない。いま、それを  $m_a$  で表すことにすれば、

(1) から

$$(2) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot m_a$$

ということになる。

さて、右の図からわかるように、曲線  $y = a^x$  の上の点  $A(0, 1)$  における接線の傾き  $m_a$  は、 $a$  が大きくなるほど大きくなる。前回の数値計算で見たとおり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.693 \dots \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.099 \dots$$

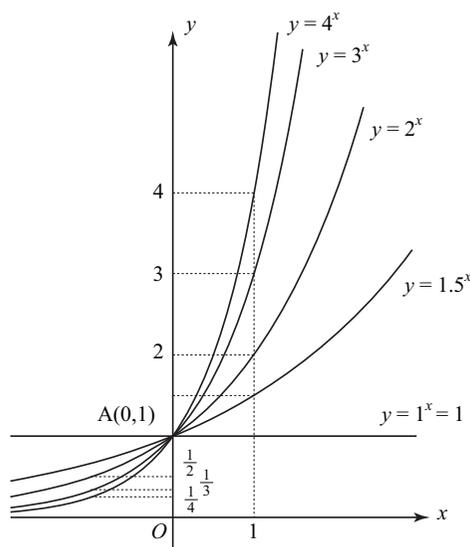
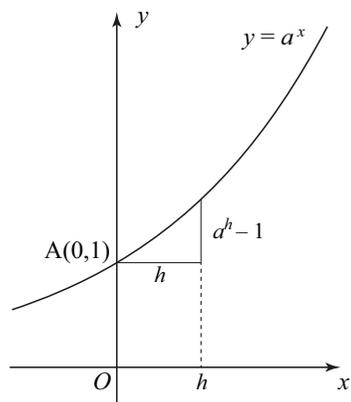
であった。したがって、ちょうど  $m_a = 1$  となるような  $a$  の値が 2 と 3 の間にちょうど一つあるだろうと考えられる。いま、 $m_a = 1$  となるような  $a$  の値を  $e$  という文字で表し、Napier の数とか、自然対数の底と呼ぶ。すなわち、

数  $e$  は次の式をみたすような数である。

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

すると (2) から、 $f(x) = e^x$  ならば  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$  が得られる。

指数関数の  $e^x$  の導関数：  $(e^x)' = e^x$



①  $c$  を定数としたとき、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ch} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ch} - 1}{ch} \cdot c = \lim_{ch \rightarrow 0} \frac{e^{ch} - 1}{ch} \cdot c = c$  が成り立つ。このことを用い、関数  $f(x) = e^{cx}$  の導関数  $(e^{cx})'$  を定義から直接計算せよ。

② 指数関数と対数関数の互いには  $e^{\log a} = a$  という関係が成り立つ。これより、 $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$  である。これを用いて、指数関数  $a^x$  の導関数  $(a^x)'$  をもとめよ。[ヒント： $\log a$  は定数であることに注意。]

③  $f(x) = e^x$  とすると、自然対数関数  $\log x$  はその逆関数である、すなわち  $f^{-1}(x) = \log x$  である。そこで、 $f'(x) = e^x$  であることと、逆関数の微分公式を用い、 $f^{-1}(x) = \log x$  の導関数が  $\frac{1}{x}$  であること、すなわち  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  であることを示せ。

4 前問によれば、 $f(x) = \log x$  としたとき、 $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$  となることがわかる。一方、

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \log(1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \log \left( \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

だから、 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$  は  $\log$  をとると 1 になるような値であることがわかる。すなわち、

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

である。次の表は  $(1+h)^{\frac{1}{h}}$  の値を計算するためのものである。 $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{1024}$  として電卓を用いて  $(1+h)^{\frac{1}{h}}$  を計算し、表の空欄を埋め、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$  の値を推測せよ。

[電卓では数の 2 乗を計算するのに “x=” と入力すればよい。例えば、 $((1 \div 4 + 1)^2)^2$  を計算するには、1,  $\div$ , 4, +, 1, =, x, =, x, =, の順に入力すればよい。]

$h$	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1+1 \div 2)^2 = 2.25$
$\frac{1}{4}$	$((1+1 \div 4)^2)^2 = 2.441406\dots$
$\frac{1}{8}$	=
$\frac{1}{16}$	=
$\frac{1}{32}$	=
$\frac{1}{64}$	=
$\frac{1}{128}$	=
$\frac{1}{256}$	=
$\frac{1}{512}$	=
$\frac{1}{1024}$	=
$\frac{1}{2048}$	=
$\vdots$	↓
0	

これより、 $e = \square$  と推測される。

5 関数  $y = e^x$  について、いろいろな  $x$  に対する  $y$  の値は次の表のようになる。

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$e^x$	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して、指数関数  $y = e^x$  のグラフを描き、そのグラフの  $(0, 1)$  における接線を引いてみよ。また、対数関数  $y = \log x$  は  $y = e^x$  の逆関数であることを用い、 $y = \log x$  のグラフを描き、 $(1, 0)$  における接線を引いてみよ。

