8 ❦ 導関数の計算・指数関数の導関数

2019年度前期　基礎数学 A2（火曜 2 限）

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

以下の問題は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について，$f_n(x) = x^n$ とおく．すなわち，$f_1(x) = x$，$f_2(x) = x^2$，$f_3(x) = x^3$,…となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1'(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \left(f_1(x)f_k(x)\right)' =$$

［結論まできちんと述べよ．］

$\boxed{2}$ 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式 $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$ において $g(x) = x^n$ とすることにより $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

b) a) の結果を利用して $(x^{-n})' = ax^b$ の形の式に直せ．

$\boxed{3}$ 【$a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = ax^b$ の形の式に直せ．

$\boxed{4}$ 【a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．［ヒント：$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-2x+3}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)^4$

$f'(x) =$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+x+1)^5}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$f'(x) =$

a を正の数としたとき，指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい．そのために，まず，$f(x) = a^x$ の $x=0$ における微分係数を求める．その定義式は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \boxed{}$$

である．そこで実験として $a=2$ と $a=3$ のときに $\dfrac{a^h-1}{h}$ の値の数値計算をしてみる．スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて，下の表を作ると

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
0.1	$(2^{0.1}-1)\times 10 = 0.7177346\ldots$	$(3^{0.1}-1)\times 10 = 1.1612317\ldots$
0.01	$(2^{0.01}-1)\times 100 = 0.6955555\ldots$	$(3^{0.01}-1)\times 100 = 1.1046691\ldots$
0.001	$(2^{0.001}-1)\times 1000 =$	$(3^{0.001}-1)\times 1000 =$
10^{-4}	$(2^{10^{-4}}-1)\times 10^4 =$	$(3^{10^{-4}}-1)\times 10^4 =$
10^{-5}	$(2^{10^{-5}}-1)\times 10^5 =$	$(3^{10^{-5}}-1)\times 10^5 =$
10^{-6}	$(2^{10^{-6}}-1)\times 10^6 =$	$(3^{10^{-6}}-1)\times 10^6 =$
10^{-7}	$(2^{10^{-7}}-1)\times 10^7 =$	$(3^{10^{-7}}-1)\times 10^7 =$
10^{-8}	$(2^{10^{-8}}-1)\times 10^8 =$	$(3^{10^{-8}}-1)\times 10^8 =$
10^{-9}	$(2^{10^{-9}}-1)\times 10^9 =$	$(3^{10^{-9}}-1)\times 10^9 =$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
0		

この表より $\dfrac{2^h-1}{h}$，$\dfrac{3^h-1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ，その値は次のように推測できる．

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{},\quad \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)