入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ
										氏 名

● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$，$u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，

u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とする．すなわち，

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x),$$
$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と定義する．ここで，求めたいのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ としたときの極限である．$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は少々無理矢理に Δu を間に挟むと，

$$(*) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．この両辺の $\Delta x \to 0$ とした極限を考える．

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\boxed{}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{}\cdot\boxed{}$$

合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\big(f\big(g(x)\big)\big)'$ は

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$u = g(x)$ としたとき，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ であったから，

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける．したがって，$g(x+\Delta x)$，$g(x)$ をそれぞれ，$u+\Delta u$，u で置き換えて

$$f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big) = \boxed{}$$

と書くことができる．そして，$(*)$ と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\begin{aligned}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{}}{\Delta x}\end{aligned}$$

となる．この両辺において $\Delta x \to 0$ とすると，$\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \boxed{}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{}$$

だから，

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{}\cdot\boxed{}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは，$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで，$f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$左辺 = \boxed{}, \qquad 右辺 = (x)' = 1$$

となるから，

$$\boxed{} = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x) = \frac{1}{\boxed{}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$，$g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\boxed{}}$$

$\boxed{1}$ $\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)'$ を求めよ.

$\boxed{2}$ $\big(g(x)^2\big)'$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ としたとき，$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である．逆関数の微分公式を用いて $\big(\sqrt{x}\big)'$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 前問と同様にして $\big(\sqrt[3]{x}\big)'$ を求めよ.

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1 - 2x^2)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)