2019 年 1 月 25 日

基礎数学 A2（金曜 2 限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{-2x-3}{2x+1}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

分母 $\neq 0$ より $2x+1 \neq 0$ $\therefore$ 定義域 $x \neq -\frac{1}{2}$

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x+1}$ の形に表せ．

$$\begin{array}{r} -1 \\ 2x+1 \,\big)\, -2x-3 \\ -2x-1 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$f(x) = -1 + \frac{-2}{2x+1}$$

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．［定義に戻る必要はない．前問の形に直してから計算するとよい．］

$$f'(x) = \left(-1 - \frac{2}{2x+1}\right)' = -2\left((2x+1)^{-1}\right)'$$

$$= -2 \times (-1) \times (2x+1)^{-2} \times (2x+1)' = \frac{4}{(2x+1)^2}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式：$y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

$$y - (-2) = 1 \times (x - \tfrac{1}{2})$$

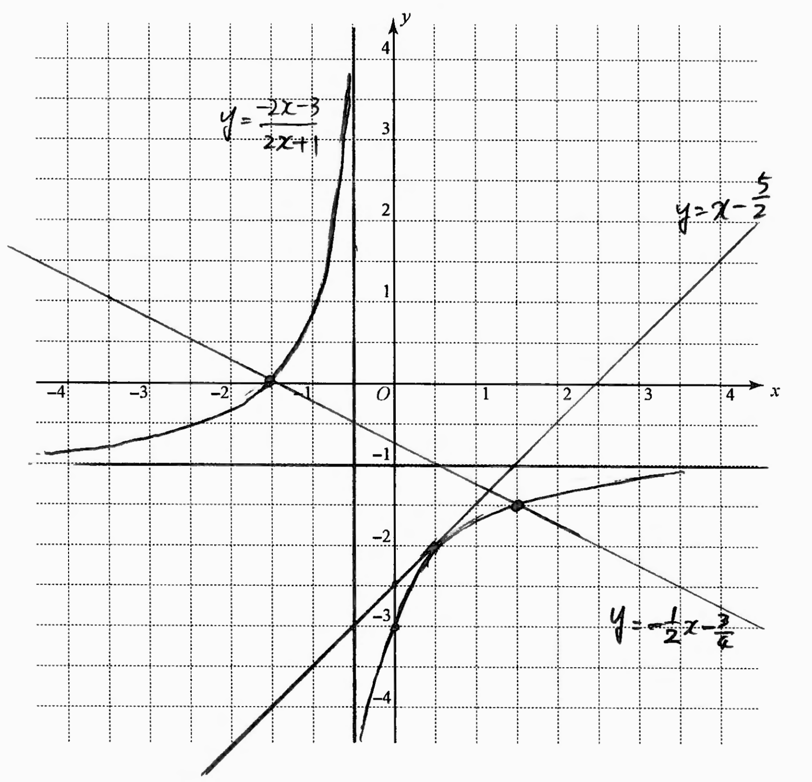
$$y = x - \frac{5}{2}$$

e) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$ の交点を求めよ．

$\dfrac{-2x-3}{2x+1} = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ より $-2x-3 = -x^2 - 2x - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$ 交点 $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, 0)$

f) $y = f(x)$ のグラフ，d) で求めた接線，および直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$ を下の座標平面内に描け．



g) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-2x-3}{2x+1} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$ を解け．

$x \leqq -\frac{3}{2}$ または $-\frac{1}{2} < x \leqq \frac{3}{2}$

$\boxed{2}$ $f(x) = -\sqrt{3-2x}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ． 3

根号内 $\geqq 0$ より $3-2x \geqq 0 \iff x \leqq \frac{3}{2}$

$\begin{cases} 定義域：x \leqq \frac{3}{2} \\ 値域：y \leqq 0 \end{cases}$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ． 4

$y = -\sqrt{3-2x}$ $\Rightarrow$ 両辺2乗 $y^2 = -(3-2x) \iff x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}$

x と y を入れ換えて $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ $\begin{cases} 定義域：x \leqq 0 \\ 値域：y \leqq \frac{3}{2} \end{cases}$

c) $f(x)$ の $x = -3$ における微分係数 $f'(-3)$ を極限による定義を用いて直接計算せよ．

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{9-2h} + 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-\sqrt{9-2h}+3)(\sqrt{9-2h}+3)}{h(\sqrt{9-2h}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-9+2h+9}{h\sqrt{9-2h}+3} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9-2h}+3} = \frac{1}{3}$$

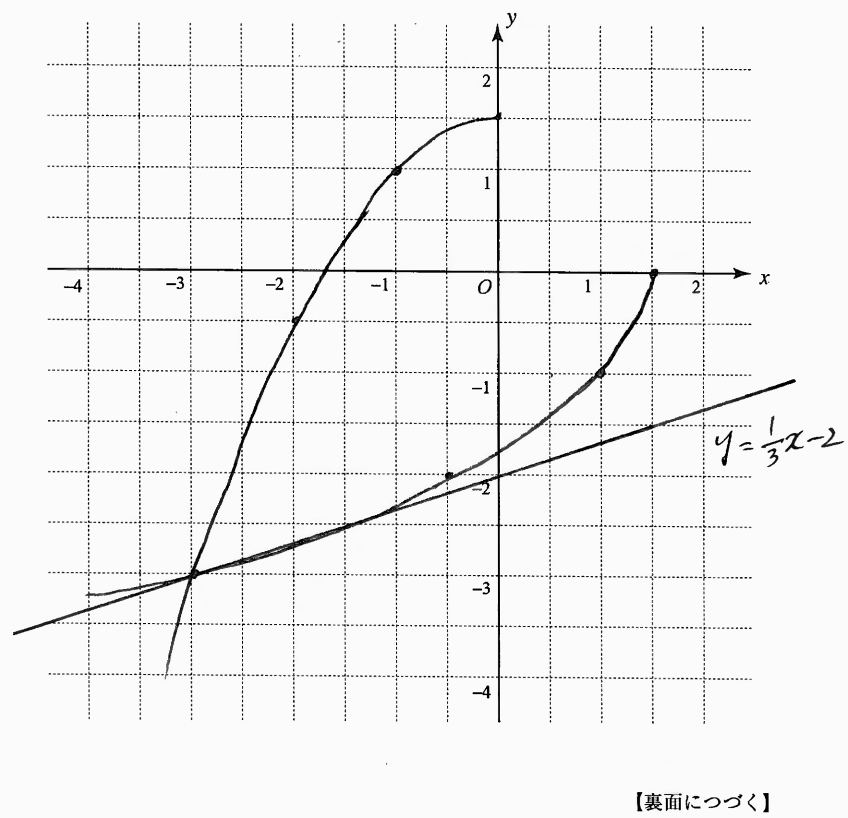
d) $y = f(x)$ のグラフの $(-3, f(-3))$ における接線の方程式を求めよ．

$$y - f(-3) = f'(-3)(x+3)$$

$$y = \frac{1}{3}(x+3) - 3$$

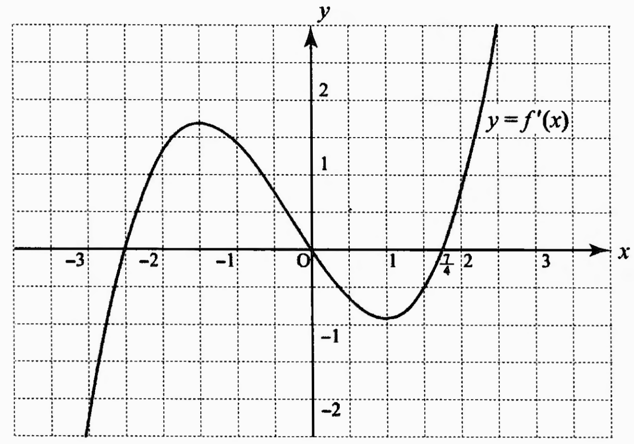
$$y = \frac{1}{3}x - 2$$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(-3, f(-3))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを下の座標平面内に描け．



【裏面につづく】

3 下の図はある関数 $f(x)$ について，その<u>導関数 $y=f'(x)$</u>のグラフの概形を示したものである．



a) 上の図をもとに，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表せ．)

x	…	$-\frac{5}{2}$	…	$-\frac{3}{2}$	…	0	…	1	…	$\frac{7}{4}$	…
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↳		⤴		↱		⤵		↳		⤴

b) 関数 $f(x)$ が極大，極小となる x の値と，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

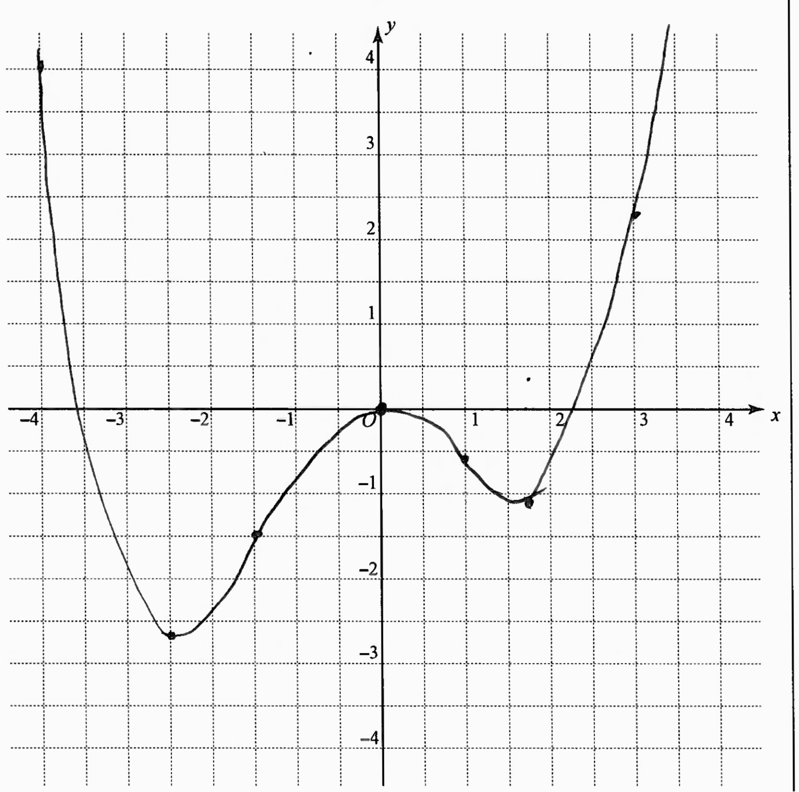
極大：$x=0$

極小：$x=-\frac{5}{2}, \frac{7}{4}$

変曲点：$x=-\frac{3}{2}, 1$

c) さらに，$f(x)$ の値が下の表に示されているとおりとする．このとき，$y=f(x)$ のグラフを可能な限り忠実に描き，極大・極小点および変曲点を示せ．

x	-4	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{4}$	3
$f(x)$	4.0	−2.7	−1.5	0.0	−0.6	−1.1	2.3



4 $f(x)$ が微分可能で，$f(x) \geqq 0$ をみたすとき，$\left(\sqrt{f(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}} \times f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

5 $f(x)$，$g(x)$ が微分可能な関数であるとき，$\left(f(x)e^{g(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(f(x)e^{g(x)}\right)' = f'(x)e^{g(x)} + f(x)\left(e^{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$= \left(f'(x) + f(x)g'(x)\right)e^{g(x)}$$

6 次の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \times \left(x-\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times (1-x^2)'$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3} \times (-\cancel{2}x)$$

$$= \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

c) $f(x) = xe^{-2x^2}$

$$f'(x) = (x)'e^{-2x^2} + x\left(e^{-2x^2}\right)'$$

$$= e^{-2x^2} + xe^{-2x^2}(-2x^2)'$$

$$= (1-4x^2)e^{-2x^2}$$

d) $f(x) = x^2(\log x)^3$

$$f'(x) = (x^2)'(\log x)^3 + x^2\left((\log x)^3\right)'$$

$$= 2x(\log x)^3 + x^2 \times 3(\log x)^2 \times (\log x)'$$

$$= 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$$

$$= x(\log x)^2(2\log x + 3)$$

【2枚目につづく】

2019 年 1 月 25 日

基礎数学 A2（金曜 2 限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

$\boxed{7}$ $f(x) = \log(x^2+1)$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

x^2+1 は常に正なので 定義域は実数全体

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2x}{x^2+1} = 0 \iff x = 0$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{2x}{x^2+1} > 0 \iff x > 0$$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-2x \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x = \pm 1$$

$$f''(x) > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ↗ ↗ ↘ ↘ で表すこと．）

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ．

極大：なし

極小：$x = 0$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x = -1$ または 1

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの裏も使用して下さい】