2018 年 7 月 27 日

基礎数学 A1（金曜２限）	入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
期末試験							氏　名	

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $\dfrac{6ab^2c}{\frac{3c}{ab}} = \overset{2}{\cancel{6}}ab^2\cancel{c}\times\dfrac{ab}{\cancel{3c}} = 2a^2b^3$

b) $\dfrac{2\cancel{\frac{ac}{b}}}{\overset{}{\underset{2}{\cancel{4}}}\left(\frac{ac}{b}\right)^{\cancel{2}} - \underset{3}{\cancel{6}}\cancel{\frac{ac}{b}}} = \dfrac{1}{2\left(\frac{ac}{b}\right)-3} = \dfrac{b}{2ac-3b}$

c) $\dfrac{x^2+x^3}{x-1} \div \dfrac{2x^2}{1-x} = \dfrac{\cancel{x^2}(x+1)}{\cancel{x-1}}\times\dfrac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{2\cancel{x^2}}$

$= -\dfrac{x+1}{2}$

d) $\dfrac{2a+b}{a^2+ab-2b^2} - \dfrac{2a+3b}{a^2+3ab+2b^2}$

$= \dfrac{2a+b}{(a-b)(a+2b)} - \dfrac{2a+3b}{(a+b)(a+2b)}$

$= \dfrac{(2a+b)(a+b)-(2a+3b)(a-b)}{(a-b)(a+b)(a+2b)}$

$= \dfrac{2b(a+2b)}{(a-b)(a+b)(a+2b)} = \dfrac{2b}{(a-b)(a+b)}$

e) $\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{2}{x(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{2(x+3)+x}{x(x+2)(x+3)} = \dfrac{3\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}(x+3)} = \dfrac{3}{x(x+3)}$

f) $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a-h}}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a-h}\right)$

$= \dfrac{1}{h}\,\dfrac{a-h-(a+h)}{(a+h)(a-h)} = \dfrac{1}{\cancel{h}}\,\dfrac{-2\cancel{h}}{(a+h)(a-h)}$

$= \dfrac{-2}{(a+h)(a-h)}$

2 $P(x) = x^3+27$，$Q(x) = x^3+4x^2-3x-18$ とする．

a) $P(x)$ を因数分解せよ．

$P(x) = (x+3)(x^2-3x+9)$

b) $Q(-3)$ を求めよ．

$Q(-3) = (-3)^3+4(-3)^2-3(-3)-18 = -27+36+9-18 = 0$

c) $Q(x)$ を因数分解せよ．

$Q(x) = (x+3)(x^2+x-6)$

$= (x+3)(x-2)(x+3)$

$= (x+3)^2(x-2)$

d) $P(x) = x^3+27$ と $Q(x) = x^3+4x^2-3x-18$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．

最大公約数 $= x+3$

最小公倍数 $= (x+3)^2(x-2)(x^2-3x+9)$

3 次の除法を行い，商と余りを求めよ．

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
2x^2-2x+1\,\overline{)\,x^3-2x^2+2x+1} \\
x^3-x^2+\frac{1}{2}x \\
\hline
-x^2+\frac{3}{2}x+1 \\
-x^2+x-\frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}
\end{array}$$

商 $= \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$　　　余り $= \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

4 $\dfrac{4x-5}{2x-3}$ を $a+\dfrac{b}{2x-3}$ の形に表せ．

$$\begin{array}{r}
2 \\
2x-3\,\overline{)\,4x-5} \\
4x-6 \\
\hline
1
\end{array}$$

$\dfrac{4x-5}{2x-3} = 2 + \dfrac{1}{2x-3}$

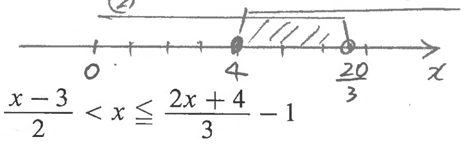
5 次の不等式を解け．またその解を数直線上に表せ．

a) $\begin{cases} 3(x-1) \geqq 5+x & \text{— ①} \\ \dfrac{x+2}{4} < 3 - \dfrac{2x-5}{10} & \text{— ②} \end{cases}$

① $\Leftrightarrow$ $3x-3 \geqq 5+x$
$\Leftrightarrow$ $2x \geqq 8$
$\Leftrightarrow$ $x \geqq 4$

② $\Leftrightarrow$ $5(x+2) < 60-2(2x-5)$
$\Leftrightarrow$ $5x+10 < -4x+70$
$\Leftrightarrow$ $9x < 60$
$\Leftrightarrow$ $x < \dfrac{20}{3}$

①かつ②より

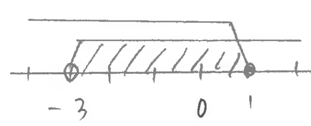


$4 \leqq x < \dfrac{20}{3}$

b) $\dfrac{x-3}{2} < x \leqq \dfrac{2x+4}{3} - 1$

$\dfrac{x-3}{2} < x$
$\Leftrightarrow$ $x-3 < 2x$
$\Leftrightarrow$ $x > -3$

$x \leqq \dfrac{2x+4}{3} - 1$
$\Leftrightarrow$ $3x \leqq 2x+4-3$
$\Leftrightarrow$ $x \leqq 1$



$-3 < x \leqq 1$

6 ふつう消費税の計算では，税抜価格にその 8% を加え，1 円以下の端数を切り捨てた金額を税込価格としている．

a) 税抜価格 x と税込価格 y との間に成り立つ不等式を示せ．

$y \leqq 1.08x < y+1 \quad (0 \leqq 1.08x - y < 1)$

b) 税込価格を 198 円とするには，税抜価格をいくらに設定すれば良いか．

$198 \leqq 1.08x < 199$

$\frac{198}{1.08} = 183.33\cdots$ より　$x = 184$円

7 a）放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ は，放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2$ をどのように平行移動したものかを述べよ．

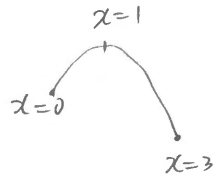
$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) + 2$

$= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} + 2$

$= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2}$

{ x軸方向に 1
　y軸方向に $\frac{5}{2}$
だけ平行移動したもの

b) 2 次関数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値，最小値を求めよ．



最大値 $\frac{5}{2}$ $(x=1)$

最小値 $\frac{1}{2}$ $(x=3)$

8 a) 2 次方程式 $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} = 0$ を解け．

$3x^2 + 6x - 4 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3}$

b) 2 次不等式 $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \geqq 0$ を解け．

$x \leqq \frac{-3-\sqrt{21}}{3}$，$x \geqq \frac{-3+\sqrt{21}}{3}$

9 1 杯の原価が 50 円のカフェラテを，1 杯 320 円で売ると，毎日 120 杯の売り上げがある．もし値上げをすれば，1 杯 10 円の値上げにつき 5 杯の割合で，売り上げが減少するという．利益を最大にするには，1 杯いくらで販売すればよいか．

$10x$円値上げしたとする．

利益 $\pi = (270 + 10x)(120 - 5x)$

$= 50(27 + x)(24 - x)$

$= 50(-x^2 - 3x + 648)$

$= -50(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{65025}{2}$

ゆえに $x = -\frac{3}{2}$ のとき π は最大となる

このとき売価は $320 - 15 = 305$ (円)

10 次の各々の式を簡単にせよ．

a) $\dfrac{\sqrt{a^3b} \times \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[6]{a^5b}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = a^1 b^1 = ab$

b) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}} \times a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{4}}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$

c) $3^{\log_3 2} = 2$

d) $2\log_2 15 - 2\log_2 5 - \log_2 9 = \log_2 \frac{15^2}{5^2 \times 3^2} = \log_2 1 = 0$

e) $\log_3(\sqrt{7}+2) + \log_3(\sqrt{7}-2) = \log_3(7-4) = \log_3 3 = 1$

11 あるお店では売り尽くしセールとして，その日に売れなかった商品を次の日にはその日のさらに 10% OFF で売ることとした．商品の値段がもとの $\frac{1}{3}$ 未満になるのは何日売れ残ったときか．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

n日後の値段は $(1 - \frac{1}{10})^n = (\frac{9}{10})^n$

$(\frac{9}{10})^n < \frac{1}{3}$

両辺の $\log_{10}$ をとり

$\log_{10}(\frac{9}{10})^n < \log_{10}(\frac{1}{3})$

$n(2\log_{10} - 1) \leqq -\log_{10} 3$

$\therefore -0.0458n \leqq -0.4771$

$n \geqq 10.43\cdots$

11日後

12 次の極限値を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2-x-6} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-3}$

$= -\frac{12}{5}$

b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a-h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a-h}\right)$

$\displaystyle= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{-2\cancel{h}}{(a+h)(a-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(a+h)(a-h)} = -\frac{2}{a^2}$

13 関数 $f(x) = (3-2x)^2$ について，定義に従って，$x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ．

$\displaystyle f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3-2(1+h))^2 - 1}{h}$

$\displaystyle= \lim_{h \to 0} \frac{(1-2h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4h + 4h^2}{h}$

$\displaystyle= \lim_{h \to 0} (-4 + 4h) = -4$

【2枚目につづく】

2018 年 7 月 27 日

基礎数学 A1（金曜 2 限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

14 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^3-x^2-5x+3\right)$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $f(x)$ の導関数を求めよ．（定義に従って計算する必要はない．）

$f'(x)=$ $\frac{1}{2}(3x^2-2x-5)$

b) $y=f(x)$ のグラフの $(1, f(1))$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式：$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

a) より $f'(1)=-2$，また $f(1)=-1$ だから

$y-(-1)=-2(x-1)$

$y=-2x+1$

c) $f'(x)=0$ となる x を求めよ．

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-5=0$

$\Leftrightarrow (3x-5)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1, \frac{5}{3}$

d) $f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (3x-5)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x<-1,\ x>\frac{5}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させ，$f(x)$ が極大値および極小値を求めよ．

x	…	-1	…	$\frac{5}{3}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	$-\frac{47}{27}$	↗

極大値 = 3　　極小値 = $-\frac{47}{27}$

f) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ をそれぞれ求めよ．

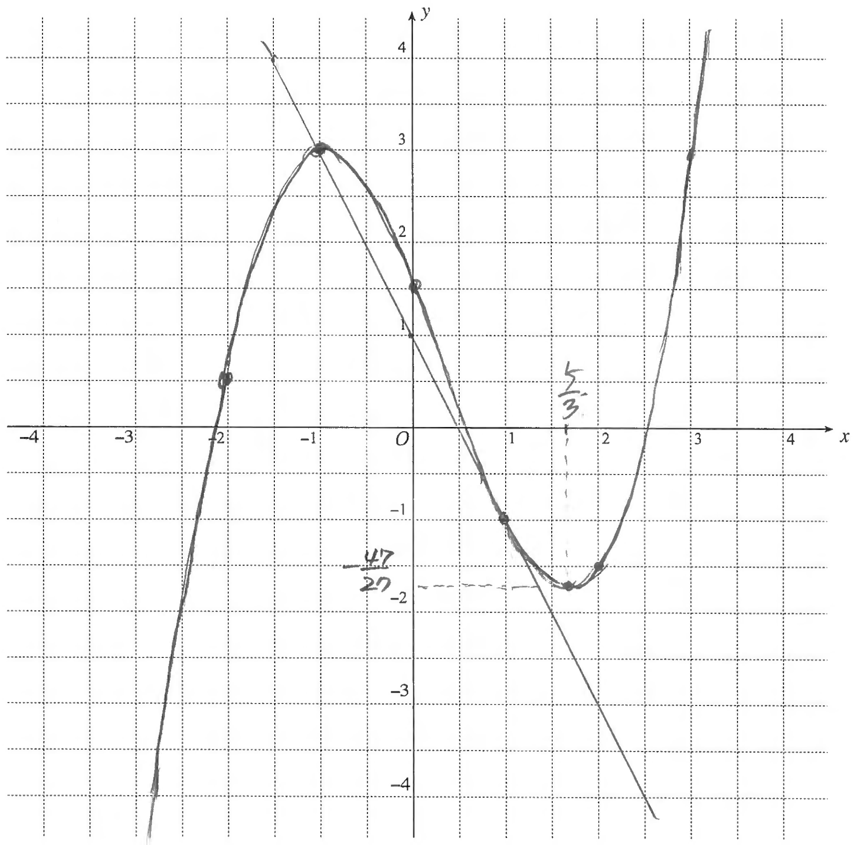
$f(-3)=$ -9　　$f(1)=$ -1

$f(-2)=$ $\frac{1}{2}$　　$f(2)=$ $-\frac{3}{2}$

$f(-1)=$ 3　　$f(3)=$ 3

$f(0)=$ $\frac{3}{2}$

g) ここまでの結果を反映させ，$y=f(x)$ のグラフと，$(1, f(1))$ における接線をのグラフをなるべく丁寧に描け．



15 a) 次の式を計算せよ．

$4(A-(3B-C))-3(A-2(B-2C))$

$=4A-12B+4C-3A+6B-12C$

$=A-6B-8C$

b) $A=-3x^2-xy+2y^2$, $B=2x^2-3xy+3y^2$, $C=-x^2+2xy-y^2$,
とするとき，次の式を計算せよ．

$4(A-(3B-C))-3(A-2(B-2C))$

$=A-6B-8C$

$=(-3x^2-xy+2y^2)-6(2x^2-3xy+3y^2)-8(-x^2+2xy-y^2)$

$=-7x^2+xy-8y^2$

16 $M=a^r$，$N=a^s$ とおき，指数法則を利用して，対数の性質 $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$ を証明せよ．

$\log_a(M\times N)=\log_a(a^r\cdot a^s)=\log_a a^{r+s}=r+s$

$\log_a M+\log_a N=\log_a a^r+\log_a a^s=r+s$

$\therefore \log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$