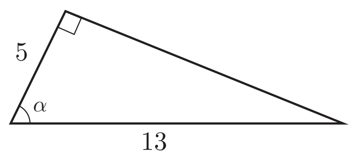
入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

1 右の図の直角三角形について，角 α の正弦，余弦，正接を求めよ．

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan\alpha = \frac{12}{5}$

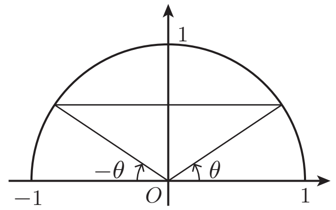


2 右の図を参照して次の式を $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

a) $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

b) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

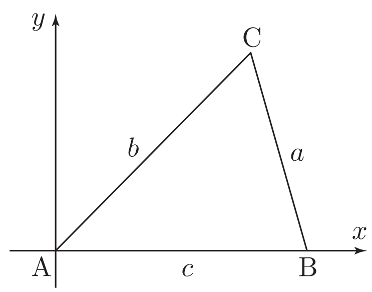
c) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$



3 次の表を完成させせよ．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4 三角形 △ABC に対して右図のように座標軸を定めれば，3 頂点の座標はそれぞれ，A$(0, 0)$，B$(c, 0)$，C$(b\cos A, b\sin A)$ となる．2 点 B，C 間の距離の 2 乗を二通りに表すことにより余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を証明せよ．



まず，$\mathrm{BC}^2 = a^2$ である．一方，2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) の間の距離は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ だから，

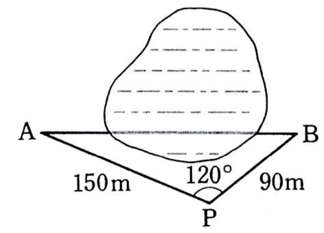
$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2\\ &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A\\ &= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2\\ &= b^2 - 2bc\cos A + c^2\end{aligned}$$

したがって，$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$ が成り立つ．

5 右の図のように，池を隔てた 2 地点 A，B 間の距離を求めるため，PA，PB，∠APB を測ったところ，

$$\mathrm{PA} = 150\mathrm{m},\ \mathrm{PB} = 90\mathrm{m},\ \angle\mathrm{APB} = 120°$$

であった．A，B 間の距離を求めよ．



△APB に余弦定理を適用して，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PA}^2 - 2\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cos P\\ &= 150^2 + 90^2 - 2\times 150\times\cos 120°\\ &= 44100\end{aligned}$$

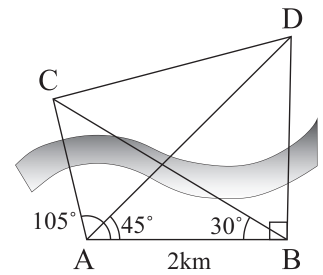
従って，$\mathrm{AB} = \sqrt{44100} = 210(\mathrm{m})$.

6 2km 離れた 2 地点 A，B から川の向こうにある 2 地点 C，D を見たら，

$$\angle\mathrm{BAC} = 105°,\quad \angle\mathrm{BAD} = 45°,$$
$$\angle\mathrm{ABC} = 30°,\quad \angle\mathrm{ABD} = 90°$$

であった．次の 2 地点間の距離を求めよ．

a) A，C 間および A，D 間の距離 ［ヒント：△ABC に正弦定理を用いる．△ABD は直角二等辺三角形］



△ABC に正弦定理を用いると，$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 30°} = \frac{2}{\sin 45°}$．ゆえに $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ (km)

△ABD は直角二等辺三角形だから $\mathrm{AD} = \sqrt{2}\,\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$ (km)

b) C，D 間の距離 ［ヒント：△CAD に余弦定理を用いる．］

△CAD に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cos 60°\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = 2 + 8 - 4 = 6\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CD} = \sqrt{6}$.

7 次の角は弧度法でいくらか．

a) $12° = \frac{\pi}{15}$　b) $15° = \frac{\pi}{12}$　c) $36° = \frac{\pi}{5}$　d) $45° = \frac{\pi}{4}$

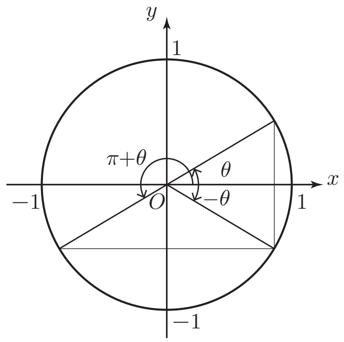
e) $90° = \frac{\pi}{2}$　f) $120° = \frac{2\pi}{3}$　g) $135° = \frac{3\pi}{4}$　h) $150° = \frac{5\pi}{6}$

8 弧度法で表された次の角を度数で表せ．

a) $\frac{\pi}{10} = 18°$ b) $\frac{\pi}{5} = 36°$ c) $\frac{2\pi}{3}$ $120° =$ d) $\frac{5\pi}{12} = 75°$

e) $\frac{5\pi}{4} = 225°$ f) $\frac{3\pi}{2} = 270°$ g) $\frac{7\pi}{4} = 315°$ h) $3\pi = 540°$

9 右の図を参照して次の式を $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．



a) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

c) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

d) $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

e) $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$

f) $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

10 次の値を求めよ．

a) $\sin\frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$

11 次の方程式をみたす角 θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

a) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

b) $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

12 次の不等式をみたす角 θ の範囲を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

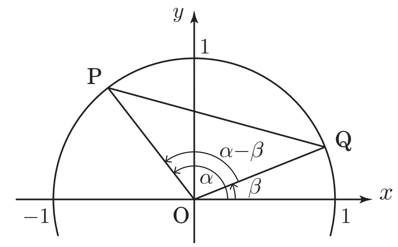
a) $\cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11\pi}{6}$

b) $\sin\theta > \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

13 右の図を参照して三角関数の加法定理を証明したい．



a) △OPQ に余弦定理を適用して，PQ^2 を $\cos(\alpha-\beta)$ を用いて表せ．

$\mathrm{PQ}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$

b) P，Q の座標がそれぞれ $\mathrm{P}(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta, \sin\beta)$ であることを使って，PQ^2 を $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\alpha$，$\sin\beta$ を用いて表せ．

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha \\ &= (\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

c) a) と b) の結果をあわせて，$\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理を示せ．

a)，b) より，$\mathrm{PQ}^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$.
これより，$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ を得る．

d) 関係式 $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ を用いて，$\sin(\alpha+\beta)$ の加法定理を示せ．

［ヒント：$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.］

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

14 次の方程式を解け．ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．

a) $\sin 2x = \cos x$

$\sin 2x = \cos x$
$\Leftrightarrow \sin x\cos x = \cos x$
$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0$
$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ または $\cos x = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$

$\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ または -2
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)