復習問題

1　不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ.

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

2　次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$

3　a) α を正の実数とするとき，$1+\alpha$ の 立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1+\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ.

b) $\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

4　漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{e^x-1-x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

5　つぎの 2 変数関数について，各変数に関する偏微分を計算せよ.

a) $f(x,y)=x^4-4x^2y^2+3xy^3-y^4+3$

b) $f(x,y)=(x+2y^2+1)^3$

c) $f(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

d) $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$

6　次の関数の臨界点を求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ.

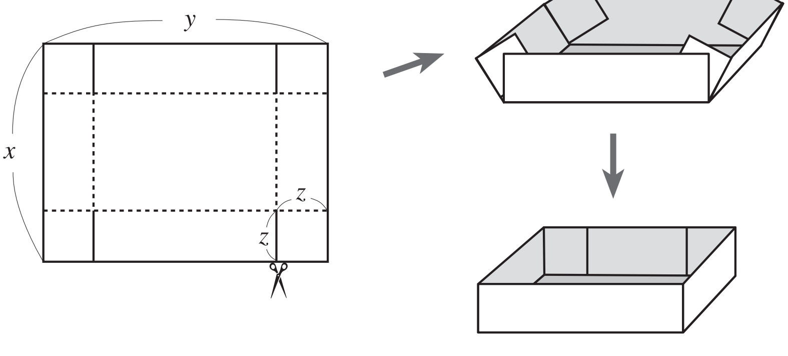
a) $f(x,y)=x^3-6x^2+x^2y^2-y^2$

b) $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$

7　条件 $x^2+xy+y^2=1$ のもとで，xy の最大値と最小値を求めよ.

8　たて x cm，よこ y cm のボール紙を使い，図のように四隅に z cm の切り口をいれ，z cm 四方の のりしろを作って折り曲げ，のりで貼ることにより，ふたのない箱をつくる．このとき，使用するボール紙の面積を一定値 a^2 に保ったまま，箱の容積を最大にすることを考える．ただし，a は正の定数とする.



【裏につづく】

a) 箱の容積を x と z の 2 変数関数とみて，それを $V(x, z)$ と書く．$V(x, z)$ を具体的に書き表せ．

b) 関数 $V(x, z)$ を領域 $D = \{(x, z) \mid 0 < 2z < x, 2xz < a^2\}$ 上で考える．$V(x, z)$ の偏微分を計算し，D 内における臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）を求めよ．

c) 上で求めた臨界点において $V(x, z)$ が最大になることは認める．$V(x, z)$ の D における最大値を求めよ．また，そのときの箱の寸法はどのようなものであるかを述べよ．

d) 箱の容積を x, y, z の 3 変数関数とみて，$V(x, y, z)$ と書く．Lagrange の乗数法を用い，$V(x, y, z)$ が $xy = a^2$ という拘束条件の下で最大になるような x, y, z を求めよ．

9 消費者の効用関数が $u(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$ で与えられているとする．このとき，$40x + 18y = 120$ という条件のもとで効用 $u(x, y)$ を最大にするような (x, y) を Lagrange の乗数法により求めよ．

10 ある財の需要関数 $x = D(p)$ が

$$D(p) = a - bp, \quad a, b > 0$$

で与えられているとする．

a) この財の需要の価格弾力性 $\mathrm{El}_p\, D(p)$ を求めよ．

b) 価格 p が $p > 0$ かつ $D(p) > 0$ であるような範囲を動くとき，需要が価格弾力的となる p の範囲を求めよ．