「復習問題」 略解

2019 年 1 月 8 日

$\boxed{1}$ a) $3x-1=t$ とおくと，$x=\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}$.

$$\int x\sqrt{3x-1}\,dx=\int\frac{t+1}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{45}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおくと，$x=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{3}$.

$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{t(t^2+1)}{3}\cdot\frac{2t}{3}\,dt=\frac{2}{9}\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{2}{45}t^5+\frac{2}{27}t^3+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$\boxed{2}$ a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$

b) $t=\log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$．これより形式的に　$dt=\dfrac{1}{x}\,dx$.

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\left(\frac{1}{x}\,dx\right)=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\log x)+C$$

c) $u=x+1, v'=e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv'=uv-\int u'v$ を用いる．このとき $v=e^x$ であることに注意.

$$\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int 1\cdot e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが，$u=\log(x+1), v'=1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v=x$ となることに注意.

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\,dx\right)dx$$
$$=x\log(x+1)-(x-\log x)+C=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

$\boxed{3}$ a) 「高次微分を用いた近似計算」の裏面の囲みの式を用いる.

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおき，$f(\alpha)=1+\dfrac{1}{3}\alpha-\dfrac{1}{9}\alpha^2+R_3(\alpha)$ とすると，$0<x<\alpha$ のとき $0\leqq(1+x)^{-\frac{8}{3}}\leqq 1$ だから，次の不等式（評価式）が成り立つ.

$$0\leqq R_3(\alpha)=\sqrt[3]{1+\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{9}\right)\leqq\frac{5}{81}\alpha^3.$$

b) $1+\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha^2}{9}$ に $\alpha=\dfrac{1}{8}$ を代入して実際に計算すると

$$\sqrt[3]{9} \fallingdotseq 2\Big(1+\frac{1}{3\times 8}-\frac{1}{9\times 8^2}\Big)=2.07986111\dots$$

このとき誤差は $2\dfrac{5}{81}\times\dfrac{1}{8^3}=0.00024112\dots$ より小さいから，

$$2.07986 \leqq \sqrt[3]{9} \leqq 2.07986111\cdots+0.00024112\cdots=2.08010223\dots$$

なので，2.07986 は $\sqrt[3]{2}$ と小数第 1 位の 0 まで一致しているはずであが，これだけでは $\sqrt[3]{9}=2.07\dots$ なのか $\sqrt[3]{9}=2.08\dots$ なのかは判定できない．

$\boxed{4}$ a) $x-\log(1+x)=x-\big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\big)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,
$e^x-1-x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-1-x=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ だから，

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+o(x)}{\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+o(x)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

b) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ であるが，この式で x を $-x$ に置き換えて，$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ も成り立つ．したがって，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\big(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\big)-\big(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\big)=x+o(x^2)$．一方，$e^x=x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ だから，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^2)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{1+o(x)}{1+\frac{x}{2}+o(x)}=1$$

$\boxed{5}$ a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-8xy^2+3y^3$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-8x^2y+9xy^2-4y^3$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x+2y^2+1)^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=12y(x+2y^2+1)^2$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$.

$\boxed{6}$ a) まず，臨界点を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12x+2xy^2=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y-2y=0$$

を解く．2 番目の式から $y(x-1)(x+1)=0$ が得られるので，$y=0$，$x=1$，$x=-1$ をそれぞれ最初の式に代入し，$(x,y)=(0,0)$，$(4,0)$，$(1,\pm3\sqrt{2}/2)$，$(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に「多変数関数の極大・極小」の 2 ページ目にある $D(x,y)$ を計算し，同じ場所にある極大・極小の判定法を用いる．

$$\begin{aligned}D(x,y)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big)^2\\&=(6x-12+2y^2)(2x^2-2)-(4xy)^2\\&=4(3x^3-6x^2-3y^2x^2-y^2-3x+6)\end{aligned}$$

- $D(0,0) = 24 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12 < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大.
- $D(4,0) = 360 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小.
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので，$(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）.
- $D(-1, \pm\sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので，$(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）.

b) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$
$$\iff \quad 1 - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2xy = 0$$
$$\iff \quad (x,y) = (1,0) \quad \text{または} \quad (-1,0)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D(1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大.
- $D(-1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \dfrac{1}{2} > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小.

c) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 + xy - y^2)e^{xy} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-1 + x^2 - xy)e^{xy} = 0$$
$$\iff \quad 1 + xy - y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -1 + x^2 - xy = 0$$
$$\iff \quad (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{または} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）.
- $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）.

$\boxed{7}$ $L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - \lambda(2x + y) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - \lambda(x + 2y) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

最初の 2 式から λ を消去すると $(y-x)(y+x) = 0$ が得られる．$y = x$ を第 3 式に代入すると $3x^2 - 1 = 0$ となり $(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$（複合同順、以下同様）が得られる．また，$y = -x$ を第 3 式に代入すると $x^2 - 1 = 0$ となり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ が得られる．$(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ での xy の値は $\dfrac{1}{3}$ であり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ での xy の値は -1 であるから，最大値は $\dfrac{1}{3}$，最小値は -1 となる.

$\boxed{8}$ a) 箱の底辺の縦と横の長さはそれぞれ，$x-2z$，$y-2z$ であり，箱の高さは z である．ボール紙の面積は一定値 a^2 という条件より $xy=a^2$．これを用いて y を消去して，

$$V=(x-2z)(y-2z)z=(x-2z)\left(\frac{a^2}{x}-2z\right)z$$

b) $\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}=0$ を解けばよい．

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-2z^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right),\qquad \frac{\partial V}{\partial z}=a^2-4z\left(x+\frac{a^2}{x}\right)+12z^2,$$

となり，D 内においては V の臨界点は $(x,z)=\left(a,\dfrac{a}{6}\right)$ のみであることがわかる．

c) $(x,z)=\left(a,\dfrac{a}{6}\right)$ のとき，$V=\dfrac{2a^3}{27}$ となる．また，このとき $y=a$ でもある．したがって， 箱の寸法は，縦 $\dfrac{2a}{3}$, 横 $\dfrac{2a}{3}$, 高さ $\dfrac{a}{6}$ ということになる．

d) $L(x,y,z)=V(x,y,z)-\lambda(xy-a^2)=(x-2z)(y-2z)z-\lambda(xy-a^2)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x}=(y-2z)z-\lambda y,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=(x-2z)z-\lambda x,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}=xyz-2(x+y)z^2-z^3,\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=xy-a^2$$

最初の 2 つの式から $z(y-x)=0$ を得る．まず，$z=0$ とすると， $V=0$ となり，V は最大にはならないので，不可．
次に $y=x$ とする．これを第 3 式に代入すると，$(x-2z)(x-6z)=0$ となる．ここで，$x=2z$ のときも $V=0$ となるので不可．よって $x=6z$．さらに，$y=x$ を第 4 式に代入すると $x=y=a$．すなわち， $x=y=a$，$z=\dfrac{a}{6}$ のとき V は最大となる．このとき，箱の底面は一辺 $x=\dfrac{2}{3}a$ の正方形で、高さは $\dfrac{a}{6}$ となる．

$\boxed{9}$ $L(x,y,\lambda)=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}-\lambda(40x+18y-120)$ とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}-40\lambda=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-18\lambda=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-(40x+18y-120)=0$$

最初の 2 式は $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=160\lambda$, $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}=24\lambda$ となるから, 片々割り算して λ を消去すると $\dfrac{y}{x}=\dfrac{20}{3}$ が得られる．これより，$y=\dfrac{20}{3}x$ を第 3 式に代入すると $160x-120=0$ となり $(x,y)=\left(\dfrac{3}{4},5\right)$ が得られ，このとき $u(x,y)$ は最大となる．

$\boxed{10}$ a) $\mathrm{El}_p\,D(p)=\dfrac{pD'(p)}{D(p)}=\dfrac{-bp}{a-bp}$.

b) 弾力的となるのは $\left|\dfrac{-bp}{a-bp}\right|>1$ となるとき．$-bp<0$，$D(p)=a-bp>0$ だから，$\left|\dfrac{-bp}{a-bp}\right|=\dfrac{bp}{a-bp}$ であるから，弾力的となるのは

$$\frac{bp}{a-bp}>1\iff bp>a-bp\iff p>\frac{a}{2b}$$

より $p>\dfrac{a}{2b}$ のとき．