

多変数関数の偏微分

1 ある町工場では 2 種類の自転車を作っている。ひとつの種類は標準モデルで、もう 1 種類は競技用モデルである。いま、一週間に、標準モデルを x 台、競技用モデルを y 台製作するのに

$$C(x, y) = 70 + 7x + 10y \text{ (千円)}$$

の費用がかかるとしよう。さらに、価格と需要の関係は次の式にしたがっているとす。

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$

$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで、 x (台)、 y (台) はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要、 p (千円)、 q (千円) はそれぞれ、標準モデルと競技用モデルの値段である。

- 一週間の歳入 $R(x, y)$ を求めよ。また、 $R(25, 10)$ を計算せよ。
- 一週間に得られる利潤 $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$ を求めよ。また、 $P(25, 10)$ を計算せよ。
- 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき、標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか。
- 逆に、標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき、競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか。

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 y は固定して定数と見なし、 z を x の 1 変数関数と見なし、微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の x に関する偏微分と呼ぶ。これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x, y) = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)$$

などと様々な記号で表わされる。同様にして変数 x は固定して定数と見なし、 z を y の 1 変数関数と見なし、微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の y に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x, y) = f_y(x, y) = \partial_y f(x, y)$$

などと表わす。

2 a) 上の問題の $P(x, y)$ について、 $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)$ 、 $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ を求めよ。また、 $\frac{\partial P}{\partial x}(15, 10)$ 、 $\frac{\partial P}{\partial x}(30, 10)$ 、 $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 10)$ 、 $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 15)$ をそれぞれ計算せよ。

b) 利潤 $P(x, y)$ が最大になるような生産台数 x 、 y の組を求めよ。

3 次の各々の関数について各変数に関する偏微分を計算せよ。

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 - 2xy^5$

b) $f(x, y) = e^{x-y}$

c) $f(x, y) = \frac{e^x}{y}$

d) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = \log(x - y)$

f) $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

関数 $z = f(x, y)$ において x を $x + \Delta x$ に, y を $y + \Delta y$ に同時に変化させたとき, z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y$$

で与えられることが知られている.

4 底面の半径 r cm, 高さ h cm の直円柱の底面の半径と高さが, それぞれ, わずかに Δr cm, Δh cm ずつ増えたとき, 直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか, また表面積はどれくらい増えるか.

5 生産量 Q が資本 K と労働力 L の関数として $Q = f(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている.

a) $\frac{\partial f}{\partial K}(K, L)$, $\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ を求めよ. 【注】 $\frac{\partial f}{\partial K}(K, L)$ は資本の限界生産力, $\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ は労働の限界生産力と呼ばれる.

b) いま (K, L) が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき, Q の変化量の近似値を求めよ.