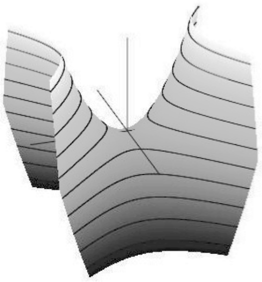
2018年度後期　微分積分 II　火曜 2 限　鍬田 政人

多変数関数の極大・極小

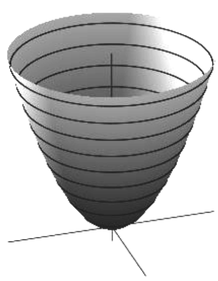
１変数関数では，各点においてグラフの接線が水平でなければ、ある一方向には増大し、その反対方向には減少する．これは 2 変数の場合も同様で，接平面が傾いていれば，関数のグラフである曲面もその点で山の頂や谷の底にはなり得ない．したがって，関数が点 (a, b) で極大または極小となるための必要条件として

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が得られる．ただし，これは極大または極小となるための必要条件であって，必ずしも十分条件ではない．上の必要条件を満たすような点 (a, b) を $f(x, y)$ の臨界点と呼ぶ．下の図で，原点 $(0, 0)$ はともに臨界点である．



$z = x^2 - y^2$



$z = x^2 + y^2$

2 変数関数の場合，上の左のグラフのに見られるように，接平面が水平であってもその点において極大にも極小にもならない点が存在する．1 変数関数の場合，極大・極小の判定は増減表によって行えるが，2 変数以上の関数では増減表は書くことができない．したがって，臨界点における極大・極小の判定は 2 階の偏導関数が用いられる．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 2 つの偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ はまた 2 変数関数となる．これらの x または y に関する偏微分を計算することにより 4 つの関数が得られる．これらを $z = f(x, y)$ の 2 階の偏微分と呼ぶ．これらは次のように表わされる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ある緩い条件の下に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ は一致することが知られている．

1　次の関数の 2 階の偏微分をすべて計算せよ．

a)　$f(x, y) = x^2 y + x y^3$

b)　$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c)　$f(x, y) = e^{-x/y}$

d)　$f(x, y) = x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}}$

【裏につづく】

関数 $z = f(x,y)$ の臨界点 (a,b) において x を $a+\Delta x$ に，y を $b+\Delta y$ に同時に変化させたとき，z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\,\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,\Delta y^2\right)$$

で与えられることが知られている．

ここで Δz の近似式は Δx，Δy の 2 次同次式で $\frac{1}{2}\left(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2\right)$ の形になっている．ここで

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{AC-B^2}{A}\right)\Delta y^2$$

と変形できることから，$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ と $AC - B^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2$ の正負によって，極大・極小が判定できる．たとえば，A，$AC-B^2$ がともに正ならば，$\Delta x = \Delta y = 0$ でない限り Δz は正となり，$z = f(x,y)$ は (a,b) で極小になる．これをまとめると次のようになる．

2 変数関数の極大・極小判定法

(1) まず $z = f(x,y)$ の臨界点を求める．すなわち，次の連立方程式の解を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

(2) 2 階微分を計算し，

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2$$

を計算する．このとき臨界点 (a,b) において

(a) $D(a,b) > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ となれば f は (a,b) で極小．（グラフは谷底型）

(b) $D(a,b) > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ となれば f は (a,b) は極大．（グラフは山型）

(c) $D(a,b) < 0$ となれば f は (a,b) で極大でも極小でもない（グラフは峠点，鞍点）．

(d) $D(a,b) = 0$ ならばこの方法では判定不能．

$\boxed{2}$ 次の関数が極大または極小となる点をもとめよ．

a) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

b) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

c) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

d) $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$

注) 行列式についての知識があれば $D(a,b)$ は行列式を用いて次のように定義されていることがわかるだろう．

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$