Lagrange の乗数法

点 (x, y) が，条件 $g(x, y) = 0$ をみたしつつ変化するとき，関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めたい．いま，点 (a, b) で $f(x, y)$ が極値を持つとすると，2 つのベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ と $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right)$ が平行となることが示せる．これは，実数 λ（ラムダ）を用いて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right)$$

と表せることにほかならない．そこで，このような条件付き極値問題を考えるとき，新たに第 3 の変数 λ を導入し，3 変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ を考えると，もとの条件付きの問題がこの関数 $L(x, y, \lambda)$ の条件なしの極値問題に言い換えられることがわかる．正確には以下の通り．

条件付極値問題

拘束条件 $g(x, y) = 0$ の下で，関数 $f(x, y)$ の極値を求めたい．このとき，新たに第 3 の変数 λ を導入し，3 変数関数 $L(x, y, \lambda)$ を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する．（λ は Lagrange の乗数と呼ばれ $L(x, y, \lambda)$ は Lagrange 関数と呼ばれる．）このとき，$L(x, y, \lambda)$ の（無条件での）極値を求めると，$g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値が求まる．したがって，極値を求めるには

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

例題　直線 $y = 2x + 3$ 上の点と 原点 O との距離の最小値を求めよ．

解　原点との距離が最小になることと，距離の 2 乗が最小になることは同値なので，拘束条件 $g(x, y) = y - 2x - 3 = 0$ の下で，距離 d の 2 乗 $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$ が最小値となる (x, y) を求めればよい．そこで，Lagrange 関数を

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - \lambda(y - 2x - 3)$$

と定義し，各々の偏微分を計算して，それらがすべて 0 になる点を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(-2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(y - 2x - 3) = 0 \end{cases}$$

【裏につづく】

第 2 式を λ について解き，第 1 式に代入して整理すると

$$2x + 4y = 0$$

が得られる．これと第 3 式を x, y についての連立 1 次方程式と見て解くと

$$x = -\frac{6}{5}, \qquad y = \frac{3}{5}$$

を得る．本来，このままではこの x, y で $f(x, y)$ が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが，この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し，最大値が存在しないことがわかる. そこで，上の値を $f(x, y)$ に代入して，$f(x, y)$ の最小値は $\dfrac{9}{5}$ となる．したがって距離の最小値は $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ である.

$\boxed{1}$ 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，$2x^2 + 4xy + 5y^2$ の最大値と最小値を求めよ.

$\boxed{2}$ 【効用最大化問題】消費者の効用関数が $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ で与えられているとする．このとき，所得制約式 $p_1 x + p_2 y = I$ のもとで $u(x, y)$ を最大にする (x, y) を Lagrange の乗数法により求めよ.

$\boxed{3}$ 【費用最小化問題】消費者の効用関数 $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ をある一定レベル u_0 に保ち，この効用レベルで支出 $S(x, y) = p_1 x + p_2 y$ を最小にしたい．そのような (x, y) を Lagrange の乗数法により求めよ.

$\boxed{4}$ 厚紙を用いて図のような中仕切りがあるふたつきの箱をつくる．使用する厚紙の面積が一定値 S であるとき，容積 V が最大になるような箱の寸法を求めよ．またその時の箱の容積を求めよ.