● 弾力性

ある量 y が他の量 x の変化に従って変化することを関数 $y=f(x)$ で表すとする．数学を現実へ応用するときには，量 x，y はそれぞれ何らかの単位を用いて表されることが普通である．つまり，小学校の算数でいう名数・無名数の名数にあたるものを用いるのである．例えば経済学への応用で，価格が 100 円上昇したときある財の需要がどれくらい変化するかを考えるために，需要を kg などの単位を使って表したりして具体的な数字を得ることができる．ところが，この方法で需要の価格に対する反応の敏感さを測ろうとするには実は問題がある．例えば，価格 100 円の値上がりは、牛肉 1kg あたりの場合はかなりのものだが，自動車 1 台あたりに対する値上げであれば取るに足らないなものかもしれない．このような問題は相対変化率を用いれば避けることができる．例えば，価格が 1% 上昇するのは，牛肉でも，自動車でも同程度の大きさと感じられるだろう

そこで，需要の価格に対する反応の敏感さを測ろうとするときは，相対変化率を用い，価格が 1% 上昇したときに需要が何 % 変化するかを問題にすればよい．こうして得られた数値は財や価格の単位によらない．この値を与えられた価格における需要の価格弾力性と呼ぶ．

いま，ある財の需要が価格の関数として

$$x=D(p)$$

と表されているとしよう．価格が p から p から $p+\Delta p$ に変化したとすると，需要 x もそれに従って変化する．このとき，x の増分 Δx は $\Delta x=D(p+\Delta)-D(p)$ であり，相対的な変化率は

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{D(p+\Delta)-D(p)}{D(p)}$$

で表される．すると，価格の相対変化率に対する需要の相対変化率の比は次の式で表される．

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}=\frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}=\frac{p}{D(p)}\frac{D(p+\Delta)-D(p)}{D(p)} \tag{1}$$

これを具体的な例で見てみると次のようになる．いま，昼休みに弁当を売っている弁当屋さんの唐揚げ弁当が 500 円から 50 円値上げされると，それまで 1 日 100 個売れていた唐揚げ弁当が 80 個しか売れなくなったとする．このとき，

$$\Delta p=+50\ (\text{円}),\quad \frac{\Delta p}{p}=+0.1,\quad \Delta x=80-100=-20\ (\text{個}),\quad \frac{\Delta x}{x}=-0.2,\quad \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}=-2$$

となる．すなわち，10% の値上げに対し，需要は 20% 減少したことを示し，値上げの割合に対して需要の下落は相対的には 2 倍の大きさがあったことがわかる．この最後の値 -2 は価格が p から $p+\Delta p$ に変化したときの需要 x の（平均の）弾力性と呼ばれる．

(1) において Δp を限りなく 0 に近づけたときの極限を価格 p における需要の価格弾力性と呼び，$E(p)$ あるいは $\mathrm{El}_p\, D(p)$ などで表す．すなわち

$$E(p)=\mathrm{El}_p\, D(p)=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{p}{D(p)}\frac{D(p+\Delta)-D(p)}{D(p)}=\frac{p}{D(p)}\frac{dD(p)}{dp}=\frac{pD'(p)}{D(p)}$$

（ただし、需要の価格弾力性は通常負の値をとるので，これの絶対値をとる流儀もある．他の本を読むときには注意が必要である．）

例. ある財の需要関数が $D(p)=8000p^{-1.5}$ であるとする．このとき，

$$\mathrm{El}_p\, D(p)=\frac{p\times(-1.5)\times 8000p^{-2.5}}{8000p^{-1.5}}=-1.5$$

【裏につづく】

であるから，1% の価格上昇によって 1.5% の需要の減少があることがわかる．このように，$|\,\mathrm{El}_p\, D(p)| > 1$ のとき，需要は弾力的であるといい，$|\,\mathrm{El}_p\, D(p)| < 1$ のときは非弾力的であるという．詳しくはミクロ経済学の授業で勉強して欲しい．

一般に関数 $f(x)$ が微分可能であり，$f(x) \neq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の x に関する弾力性を

$$\mathrm{El}_x\, f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

と定義する．

参考. 経済学に限らず，物理学でも物理量を測るときに基準となる量との比で表すことがある．物理学ではさらにその対数をとって表すことも多い．このように物理量を基準となる量との比の対数で表す指標をレベル表現といい，単位はデシベル（記号: dB）がよく用いられる．物理量 A に対し，基準量を A_0 としたとき，物理量 A のレベル表現 L_A は

$$L_A = 10 \log_{10} \frac{A}{A_0} \quad \text{（単位 dB）}$$

で定義される．日常よく耳にする音の大きさの単位 dB は、音の強さ（音圧レベル）を，基準となる音圧との比の対数で表したものであり，電気工学・音響工学などの分野ではこれ以外にも電圧や電力の比較、減衰などをエネルギー比で表すのに使用される．レベル表現は二つの量の相対的な関係を表現するものだから，絶対的な値を表現するために各分野で基準値である 0 dB に相当する量が定義されている．

対数を用いて表現すると，倍率と倍率の組み合わせで掛け算になる計算を足し算ですませることができることにある．例えば増幅率が 1 段で 100 倍のアンプを 2 段重ねると、全体の増幅率は 100×100 で 10000 倍になる．これを dB であらわすと，1 段は 20 dB の増幅率であ，それが $20 + 20 = 40$ で全体で 40 dB の増幅率になる．

この考え方は，利率についても応用することができる．例えば，年 6% の利率は $10 \log_{10} 1.06 = 0.253$ dB と表せ，複利計算では，2 年後には元本の 0.506 dB 倍になる．さらに，$12 \times 0.253 = 3.036$ dB であるが，2 倍は $10 \log_{10} 2 = 3.01$ dB であることから，年率 6% の複利で利息のつく預金をすると 12 年後には元本の 2 倍を超えることがわかる．

いま，関数 $y = f(x)$ に対し，$X = \log \dfrac{x}{x_0}$，$Y = \log \dfrac{y}{y_0}$ とおいて x，y をレベル表現で表すと，合成関数の微分公式と逆関数の微分公式により，

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} = \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dX}} = \frac{1}{y} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \mathrm{El}_x\, f(x)$$

すなわち，弾力性とはそれぞれの量をレベル表現を用いて表したときの微分係数のほかならない．

練習問題

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x)$ の x に関する弾力性 $\mathrm{El}_x\, f(x)$ を求めよ．ただし，

a) $f(x) = 3x^{-3}$　　b) $f(x) = \sqrt{x}$　　c) $f(x) = e^{-ax}$　　d) $f(x) = x^p e^{-ax}$

$\boxed{2}$ a) ノルウェー国営鉄道の調査では，乗車距離が 60km までは，乗客数の運賃に対する弾力性は約 −0.4 であった．この調査をもとにすれば，運賃を 10% 値上げしたとき乗客数はどのようになると考えられるか．

b) 同じ調査で，乗車距離が 300km を超える旅程では弾力性は −0.9 であるという結果が出た．このように弾力性の絶対値が上の場合より大きくなる理由は何であると考えられるか．