漸近展開

関数 $f(x)$ を $x=0$ のまわりで多項式によって近似することを考える．すなわち，$f(x)$ に対して，ある n 次多項式をうまく選び，その差が「n 次より高次の無限小」であるようにしたい，すなわち，

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + (n \text{ 次より高次の無限小})$$

と表したい．

$x=0$ のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ が，$x \to 0$ としたとき 0 に近づくなら，すなわち $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ が成り立つなら，$\varepsilon(x)$ は**無限小**であるという．例として，n が自然数のとき，関数 x^n は無限小である．また，n が大きくなればなるほど，x^n が急速に 0 に近づく．そこで，$\varepsilon(x)$ が n **次より高次の無限小**であることを $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon(x)}{x^n} = 0$ と定義する．すると，$f(x)$ と $g(x)$ の差が n 次より高次の無限小であるとは，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$$

が成り立つことを意味する． これを $f(x) = g(x) + o(x^n)$ と書く．これは $f(x)$ と $g(x)$ の差が n 次より高次の無限小あることを表す略記法である．したがって，関数 $f(x)$ を $x=0$ のまわりで多項式によって近似するとは

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + o(x^n)$$

と表すことである．この形の式を $f(x)$ の $x=0$ のまわりでの**漸近展開**と呼ぶ．通常は $o(x^n)$ は「x^{n+1} 以上の項」をひとくくりにしたものと考えて差し支えない． $f(x)$ の漸近展開は $x \to 0$ としたときの極限の計算に有用である．ただし，$o(x^n)$ と近似計算の誤差項 $R_n(h)$ と混同してはならない．$o(x^n)$ は $x \to 0$ としたときの極限に関する性質であり，誤差項 $R_n(h)$ では h は（無限小ではない）有限の値をとり，$R_n(h)$ も有限の値である．

この記法を用いれば，$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとは

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

であることに他ならない．これは，$f(x)$ と $f(0) + f'(0)x$ の差の $x \to$ としたときの極限が

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = 0$$

となるからである．

これを拡張して，$f(x)$ が $x=0$ で n 階微分可能であるとき，$f(x)$ は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

という漸近展開をもつことが証明できる．これを用いると，例えば，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

がなり立つ．

裏の式はこれを用いてつくられた漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

【裏につづく】

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x=0$ のまわりの漸近展開を（ ）内の次数の項まで求めよ.

a) $\sqrt{1-x}$ (x^4 の項まで)　b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (x^6 の項まで)　c) $\dfrac{x}{1+x^3}$ (x^7 の項まで)

d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (x^6 の項まで)　e) $\sqrt[3]{1+x^3}$ (x^9 の項まで)　f) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (x^4 の項まで)

$\boxed{2}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(x+1)}{x^2}$　b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$　c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$