

□ ある値域での土地の価格と建物の価格は、広さ1平方メートルにつき、それぞれ8万円、20万円である。市場調査により、顧客の満足度は土地、建物の広さを x, y 平方メートルとすると、 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ に比例することがわかっている。いま、3900万円の予算をすべて使って家を建てたい顧客がいるとき、この顧客の満足度を最大にするには、土地と建物の広さをどれだけにすればよいか。Lagrange の乗数法を用いて求めよ。

$f(x, y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ を $8x + 20y \leq 3900$ という条件の下で最大にしたい。予算を使い切ったときのほうが満足度が大きくなることは明らかなので、 $8x + 20y = 3900$ という条件の下での最大値を求めればよい。そこで、

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \lambda(8x + 20y - 3900)$$

とおき、偏微分を計算して、それぞれを0とおく。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \lambda(8) = 0 & \dots \text{①} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y^{-\frac{1}{2}} - \lambda(20) = 0 & \dots \text{②} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(8x + 20y - 3900) = 0 & \dots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①より } \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 8\lambda \quad \dots \text{①}'$$

$$\text{②より } y^{-\frac{1}{2}} = 20\lambda \quad \dots \text{②}'$$

$$\frac{\text{①}'}{\text{②}'} \text{より } \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{8\lambda}{20\lambda} \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{4}{5}\sqrt{x} \Rightarrow y = \frac{16}{25}x$$

これを③に代入して、

$$-(8x + 20 \times \frac{16}{25}x - 3900) = 0 \Rightarrow x = 3900 \times \frac{5}{104} = 187.5$$

このとき、 $y = 3900 \times \frac{5}{104} \times \frac{16}{25} = 120$ 。したがって、土地 187.5m^2 、建物 120m^2 とすればよい。