$\boxed{1}$ $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{27}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

$f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の高次微分による近似式の $n = 3$，$h = \dfrac{8}{100}$ の場合を用いる．

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

より，

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4\times 2!}h^2 + R_3(h)$$

であり，また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $3/8$ をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが，0 以上であることはすぐにわかる．

したがって，近似値は

$$\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}} \fallingdotseq 5 + \frac{5}{2}\,\frac{8}{100} - \frac{5}{8}\left(\frac{8}{100}\right)^2 = 5.1960$$

で，近似の誤差は，

$$0 \leqq 5\,R_3\left(\frac{8}{100}\right) \leqq 5\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{8}{100}\right)^3 \fallingdotseq 0.000160\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$5.1960 \leqq \sqrt{27} \leqq 5.1960 + 0.000160 = 5.196160\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{27}$ の小数点以下第 3 位までの値は 5.196 であることがわかる．

2018 年 10 月 23 日

入学年度	学部	学 科		組		番 号		検	フリガナ	
									氏 名	

$\boxed{2}$ $f(x)=e^x$，$h=1$，$n=8$ として e の近似値を求め，誤差の範囲を評価せよ．

$$e^h=1+h+\frac{1}{2!}h^2+\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{4!}h^4+\frac{1}{5!}h^5+\frac{1}{6!}h^6+\frac{1}{7!}h^7+R_8(h)$$

$h \geqq 0$ のとき，$f^{(n)}(x)=e^x$ は $0 \leqq x \leqq h$ では $x=0$ のとき最小値 1，$x=h$ のとき最大値 e^h をとる．

$h=1$ とすると，

$$e \fallingdotseq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=2.718253968\ldots$$

であり，誤差は

$$\frac{1}{8!}=0.00002480\cdots \leqq R_8(1) \leqq \frac{e}{8!} \leqq \frac{3}{8!}=0.00007440\ldots$$

と評価できる．（これより，e の近似値は小数第 3 位まで正しいことがわかる．第 4 位は 2 か 3 はこれでは判断できない．）

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)