$\boxed{1}$ 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ の臨界点をすべて求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ.

まず 2 階までの偏導関数を計算する.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

臨界点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial 6} = 3y^2 - 3 = 3(y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$

を解くと，$(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の 4 点が臨界点であることがわかる.

(a) $(x, y) = (1, 1)$.

$$D(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 36 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$$

より，$(1, 1)$ で極小.

(b) $(x, y) = (1, -1)$.

$$D(1, -1) = -36 < 0$$

より，$(1, -1)$ は鞍点.

(c) $(x, y) = (-1, 1)$.

$$D(-1, 1) = -36 < 0$$

より，$(-1, 1)$ は鞍点.

(d) $(x, y) = (-1, -1)$.

$$D(1, 1) = 36 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$$

より，$(-1, -1)$ で極大.

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
						氏 名	

$\boxed{2}$ 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の最大値・最小値を求めよ．

$L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3x-3y-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=3x^2-3-\lambda(2x)=0 & \cdots \text{①} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=3y^2-3-\lambda(2y)=0 & \cdots \text{②} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

① より $3x^2-3=\lambda(2x)$ $\cdots$ ①$'$
② より $3y^2-3=\lambda(2y)$ $\cdots$ ②$'$

$\dfrac{\text{①}'}{\text{②}'}$ より $\dfrac{3x^2-3}{3y^2-3}=\dfrac{\lambda(2x)}{\lambda(2y)} \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{y^2-1}=\dfrac{x}{y} \Rightarrow y(x^2-1)=x(y^2-1) \Rightarrow (xy+1)(x-1)=0$

$xy=-1$ のとき，$y=-\dfrac{1}{x}$ を ③ に代入すると $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1=0$ となる．この分母を払うと $x^4-x^2+1=0$ となるが，この方程式には実数解がない．

$x=y$ のとき，$y=x$ を ③ に代入すると $2x^2-1=0$ より，$x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

より，

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最大値 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最小値 $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)