

a を 1 でない正の定数とするとき、 a を底とする x の指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい。いま、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

であるから、

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

となる。ここで、右の図において

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

というのは、曲線 $y = a^x$ の上の点 $A(0, 1)$ における接線の傾きにほかならない。いま、それを m_a で表すことにすれば、(1) から

$$(2) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot m_a$$

ということになる。

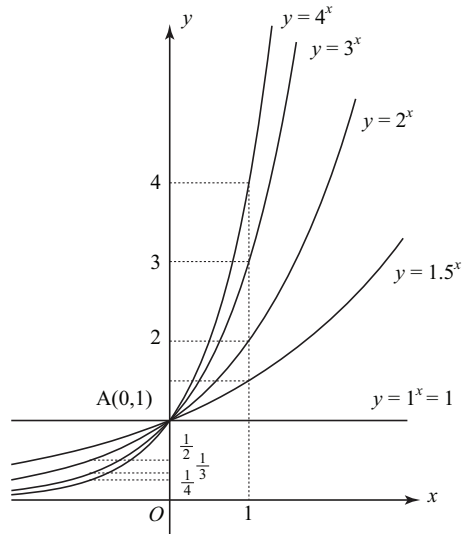
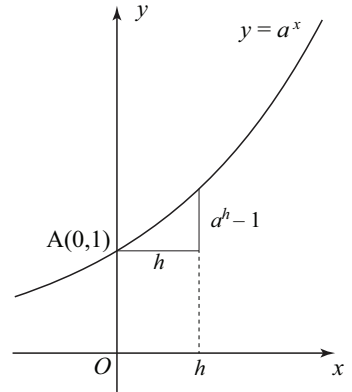
さて、右の図からわかるように、曲線 $y = a^x$ の上の点 $A(0, 1)$ における接線の傾き m_a は、 a が大きくなるほど大きくなる。前回の数値計算で見たとおり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \doteq 0.693 \dots \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} \doteq 1.099 \dots$$

であった。したがって、ちょうど $m_a = 1$ となるような a の値が 2 と 3 の間にちょうど一つあるだろうと考えられる。いま、 $m_a = 1$ となるような a の値を e という文字で表し、Napier の数とか、自然対数の底と呼ぶ。すなわち、数 e は次の式をみたすような数である。

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

すると (2) から、 $f(x) = e^x$ ならば $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ が得られる。



指数関数の e^x の導関数： $(e^x)' = e^x$

入学年度	学部	学科	組	番号	校	フリガナ	
						氏名	

1 極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を用いて関数 $f(x) = xe^x$ の導関数を定義を直接用いて求めよ。

2 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a} = a$ という関係が成り立つ。これより、 $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$ である。そこで、 $y = e^u$ 、 $u = (\log a)x$ とおいて、合成関数の微分公式を用いて、指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ。[ヒント： $\log a$ は定数であることに注意。]

3 $f(x) = e^x$ とすると、自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である、すなわち $f^{-1}(x) = \log x$ である。そこで、 $f'(x) = e^x$ であることと、逆関数の微分公式を用い、 $f^{-1}(x) = \log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること、すなわち $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることを示せ。

4 前問によれば, $f(x) = \log x$ としたとき, $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ となることがわかる. 一方,

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \log \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

だから, $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ は \log をとると 1 になるような値であることがわかる. すなわち,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

である. 次の表は $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算するためのものである. $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{1024}$ として電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し, 表の空欄を埋め, 極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ.

[電卓では数の 2 乗を計算するのに “ $\times =$ ” と入力すればよい. 例えば, $((1 \div 4 + 1)^2)^2$ を計算するには, 1, \div , 4, +, 1, =, \times , =, \times , =, の順に入力すればよい.]

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1 + 1 \div 2)^2 = 2.25$
$\frac{1}{4}$	$((1 + 1 \div 4)^2)^2 = 2.441406\dots$
$\frac{1}{8}$	=
$\frac{1}{16}$	=
$\frac{1}{32}$	=
$\frac{1}{64}$	=
$\frac{1}{128}$	=
$\frac{1}{256}$	=
$\frac{1}{512}$	=
$\frac{1}{1024}$	=
$\frac{1}{2048}$	=
\vdots	\downarrow
0	

これより, $e =$ と推測される.

5 関数 $y = e^x$ について、いろいろな x に対する y の値は次の表のようになる。

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して、指数関数 $y = e^x$ のグラフを描き、そのグラフの $(0, 1)$ における接線を引いてみよ。また、対数関数 $y = \log x$ は $y = e^x$ の逆関数であることを用い、 $y = \log x$ のグラフを描き、 $(1, 0)$ における接線を引いてみよ。

