2017年7月25日

微分積分 I（火曜２限）	入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
期末試験											氏 名	

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+3}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

分母≠0 より 定義域は $x \neq -\frac{3}{2}$

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x+3}$ の形に表せ．

$$f(x) = 2 + \frac{-1}{2x+3}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2x+3 \,\big)\, 4x+5 \\ 4x+6 \\ \hline -1 \end{array}$$

c) x が -1 から $-1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．［ヒント：前問の形に直してから計算するとよい．］

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\cancel{2} + \frac{-1}{2(-1+h)+3} - \left(\cancel{2} + \frac{-1}{2\times(-1)+3}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{-1}{1+2h} + 1}{h} = \frac{-1+1+2h}{h(1+2h)} = \frac{2}{1+2h}$$

d) $f(x)$ の $x = -1$ における微分係数を極限による定義を用いて直接計算せよ．

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{1+2h} = 2$$

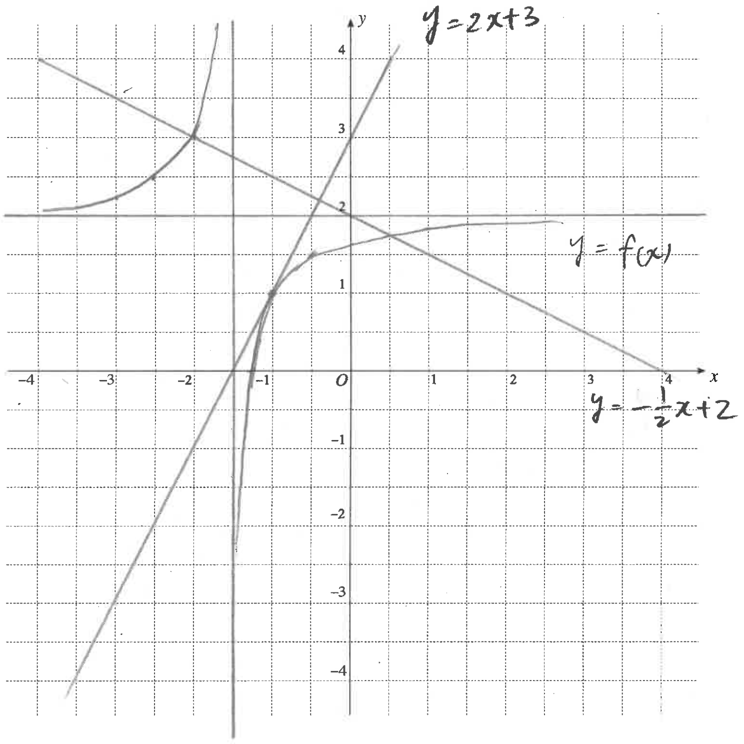
e) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ．

接線： $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$

$y - 1 = 2(x+1)$

$\therefore y = 2x + 3$

f) $y = f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ を下の座標平面内に描け．



g) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ の交点を求めよ．

$$\frac{4x+5}{2x+3} = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow 8x + 10 = (2x+3)(-x+4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = 0$$

$\therefore x = -2, \frac{1}{2}$．　よって交点は $(-2, 3), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{4x+5}{2x+3} \leqq -\dfrac{1}{2} + 2$ を解け．

グラフとg)より　$x \leqq -2$，$-\frac{3}{2} < x \leqq \frac{1}{2}$

i) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を述べよ．

$$y = \frac{4x+5}{2x+3} \Rightarrow 2xy + 3y = 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow (2y-4)x = -3y + 5 \Rightarrow x = \frac{-3y+5}{2y-4}$$

ここで x と y を入れ換え　$y = \dfrac{-3x+5}{2x-4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-3x+5}{2x-4}$，　定義域は $x \neq 2$

j) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の値域を述べよ．

$f(x)$ の値域　$y \neq 2$

$f^{-1}(x)$ の値域　$y \neq -\frac{3}{2}$

k) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ が成り立つことを確かめよ．

$$\frac{4\left(\frac{-3x+5}{2x-4}\right) + 5}{2\left(\frac{-3x+5}{2x-4}\right) + 3} = \frac{2(-3x+5) + 5(x-2)}{(-3x+5) + 3(x-2)}$$

$$= \frac{-6x+5x}{5-6} = \frac{-x}{-1} = x$$

$\boxed{2}$ $f(x)$ が微分可能で，$f(x) \geqq 0$ をみたすとき，$\left(\sqrt{f(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} \times f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$\boxed{3}$ $f(x)$, $g(x)$ が微分可能な関数であるとき，$\left(f(x)e^{g(x)}\right)'$ を求めよ．

$$\left(f(x)e^{g(x)}\right)' = f'(x)e^{g(x)} + f(x)\left(e^{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$= \left(f'(x) + f(x)g'(x)\right)e^{g(x)}$$

【裏面につづく】

4 $f(x)=\sqrt{2x+3}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y=f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域は根号内 $\geqq 0$ より $x \geqq -\frac{3}{2}$

値域は $y \geqq 0$

b) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y=\sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2=2x+3$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}$

x と y を入れ換えて．$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$．

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$． 定義域 $x \geqq 0$ 値域 $y \geqq -\frac{3}{2}$

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．(定義に戻る必要はない．)

$f'(x)=\left((2x+3)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\times(2x+3)'$

$=(2x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

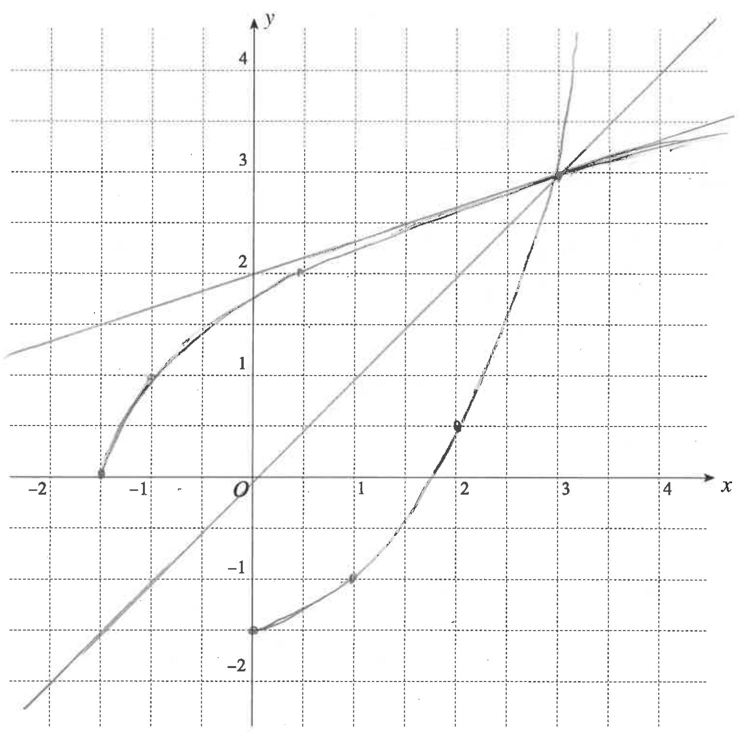
d) $y=f(x)$ のグラフの $(3, f(3))$ における接線の方程式を求めよ．

接線 $y-f(3)=f'(3)(x-3)$

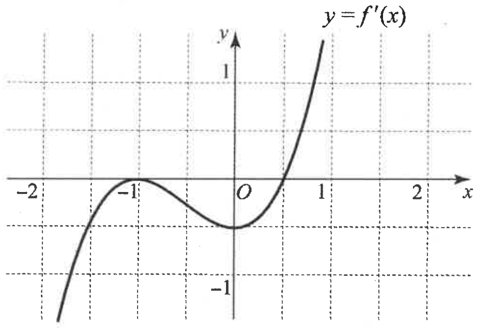
$y-3=\frac{1}{3}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+2$

e) $y=f(x)$ のグラフ，$(3, f(3))$ における接線，および逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフの3つを右上の座標平面内に描け．



5 下の図はある関数 $f(x)$ について，その導関数のグラフ $y=f'(x)$ の概形を示したものである．



a) 上の図をもとに，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ⤴ ⤵ ⤵ で表すこと．)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	変曲点	↘	極小	↗

b) 関数 $f(x)$ が極大，極小となる x の値と，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

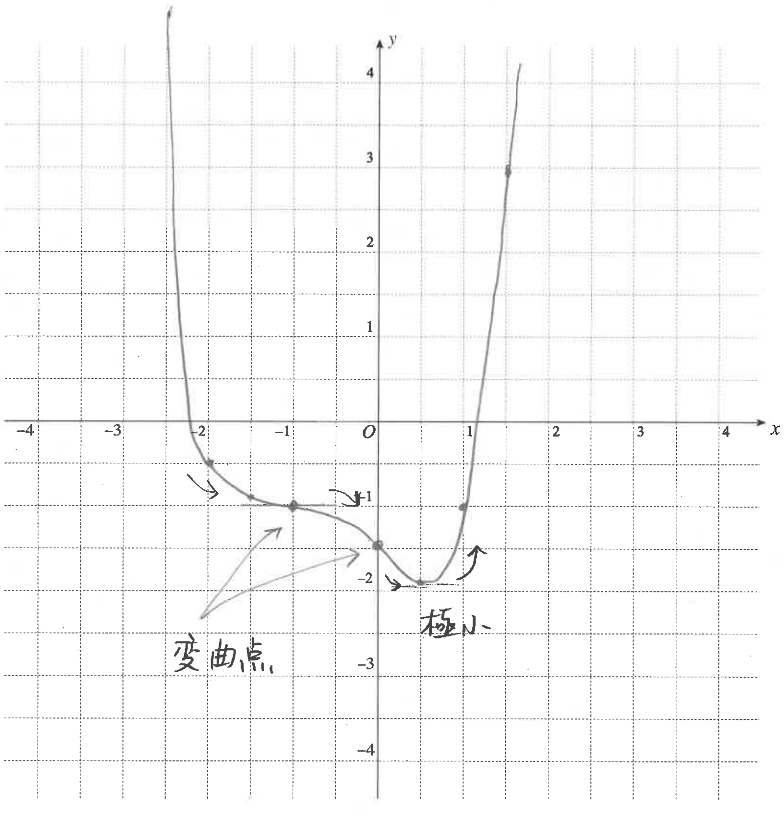
極大：なし

極小：$x=\frac{1}{2}$

変曲点：$x=-1, 0$

c) さらに，$f(x)$ の値が下の表に示されているとおりとする．このとき，$y=f(x)$ のグラフを可能な限り忠実に描き，極大・極小点および変曲点を示せ．

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	4.91	0.5	−0.84	−1	−1.5	−1.84	−1	2.91



微分積分Ⅰ（火曜２限）	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
期末試験							氏 名	

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

真数条件，分母≠0 より　$x > 0$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \frac{(\log x)' \cdot x - \log x \cdot (x)'}{x^2}$$
$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0 \Leftrightarrow x = e$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \log x > 0 \Leftrightarrow x < e$$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = \frac{(1-\log x)' \cdot x^2 - (1-\log x)(x^2)'}{x^4}$$
$$= \frac{-\frac{1}{\cancel{x}}x^{\cancel{2}} - 2\cancel{x}(1-\log x)}{x^{\cancel{4}\,3}}$$
$$= \frac{-1-2+2\log x}{x^3} = \frac{-3+2\log x}{x^3}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\log x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -3 + 2\log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．(増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ⤴ ⤺ ⤷ ⤵ で表すこと．)

x	0	…	e	…	$e^{\frac{3}{2}}$	…
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ．

極大：　$x = e$

極小：　なし

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

変曲点　$x = e^{\frac{3}{2}}$

i) f) の増減表を用い，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log 3}{3}$ を示せ．

$e < 3 < \pi$ であるが，$f(x)$ は $x > e$ で減少関数

したがって $f(\pi) < f(3)$

$$\therefore \frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log 3}{3}$$

j) i) の結果を用い，π^3 と 3^π のどちらが大きいかを示せ．

［ヒント：まず，$3\log\pi$ と $\pi\log 3$ の大小を比較せよ．］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log 3}{3}$ の両辺に 3π をかけて

$$3\log\pi < \pi\log 3$$
$$\Rightarrow \log\pi^3 < \log 3^\pi$$

log は増加関数だから　$\pi^3 < 3^\pi$

$\boxed{7}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = e^{\sqrt{1-2x}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{1-2x}} \cdot (\sqrt{1-2x})' = e^{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \times (1-2x)'$$
$$= e^{\sqrt{1-2x}} \times (-1)(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-e^{\sqrt{1-2x}}}{\sqrt{1-2x}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x + 3x^2}$

$$f'(x) = \left((1-2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(1-2x+3x^2)^{-\frac{2}{3}} \times (1-2x+3x^2)'$$
$$= \frac{1}{3}(1-2x+3x^2)^{-\frac{2}{3}} \times (6x-2)$$
$$= \frac{2(3x-1)}{3\sqrt[3]{(1-2x+3x^2)^2}}$$

c) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+1} \times \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$