復習問題　略解

$\boxed{1}$ $f(x)$ が確率密度になるためには $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ とならなければならない．そこで，左辺を計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx = c\int_0^1 (x-x^2)\,dx = c\Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{c}{6}$$

となる．したがって $c = 6$ でなければならない．このとき，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 6\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)\,dx - \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = 6\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx - \frac{1}{4}$$

$$= 6\Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$\boxed{2}$ １試合にかかる時間を X とおくと，この調査結果は X が正規分布 $N(198, 24.0^2)$ に従っていることを意味する．ここで，時間の単位は分である．求める確率は $P(X \leqq 150)$ である．今，$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-198}{24.0}$ とおくと，$Z \sim N(0,1)$ となり，

$$P(X \leqq 150) = P\Big(Z \leqq \frac{150-198}{24.0}\Big) = P(Z \leqq -2.00)$$

が成り立つ．この確率を標準正規分布表から求めと次のようになる．

$$P(Z \leqq -2.00) = P(Z \geqq 2.00) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228\ (= \text{約 } 2.3\%)$$

$\boxed{3}$ 標本平均 $\overline{X}$ は母平均価格を μ，母標準偏差を σ とするとき，正規分布 $N\big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\big)$ に従うので，$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は $N(0,1)$ に従う．このとき，$P(|Z| < k) < 0.95$ となるような k を正規分布表よりもとめると $k = 1.96$ となる．そこで，$|Z| < 1.96$ という条件を μ について解くと，

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る．これに $\overline{X} = 3.5, \sigma = 0.2, n = 25$ をあてはめると，

$$3.5 - 1.96\frac{0.2}{5} < \mu < 3.5 + 1.96\frac{0.2}{5} \quad \text{より} \quad 3.4216 < \mu < 3.5784$$

$\boxed{4}$ 考え方は前問と同様．視聴率を p とすると，標準偏差 σ は $\sqrt{p(1-p)}$ となる（二項分布の $n = 1$ の場合).「標本視聴率」は $\overline{p} = \frac{160}{400} = 0.40$ である．このとき，σ は $\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})} = \sqrt{0.4\times 0.6}$ で代用し，

$$0.4 - 1.96\frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} < p < 0.4 + 1.96\frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} \quad \text{より} \quad 0.352 < p < 0.448$$

$\boxed{5}$ 帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 198$，対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 198$ として，片側検定を行う．
そこで，$\mu = 198$ と仮定し，36 試合の標本平均 $\overline{X}$ に対し，$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-198}{4.0}$ とおく．このとき，$Z \sim N(0,1)$ となるが，標準正規分布表を用いると，$Z < -1.645$ となる確率が 5% 未満であることがわかる．いま，$\overline{X} = 190$ とすると $Z = -2.0 < -1.645$ となるので，このような確率は 5% 未満であり，「滅多に起きない」と考えられ，帰無仮説 H_0 は棄却される．これより，対立仮説 H_1 が採択され，「方策の効果があり，平均試合時間は短縮した」と結論づけられる．

$\boxed{6}$ 帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 22.0$，対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 22.0$ として，片側検定を行う．
前問と同様にして，$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-22.0}{\frac{2.0}{7}}$ とおき，$\overline{X} = 20.7$ のときの Z の値を計算すると $Z = -4.55 < -1.65$ となる．したがって H_0 は棄却され，このグループの学生は全国平均と比べて痩せているといえる．

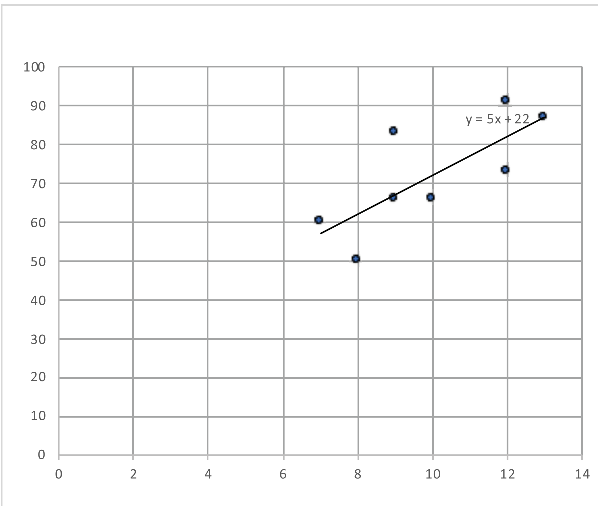
【裏につづく】

7 検定の枠組みは前 2 問と同様であるが，問題 4 のように σ として $\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}$ を用いることだけが異なる．
$Z = \dfrac{\overline{p}-0.4}{\frac{\sqrt{0.4(1-0.4)}}{\sqrt{600}}}$ に対し，$\overline{p} = \dfrac{216}{600}$ とおいて計算すると，$Z = -2.0$ となるので，この問題でも $\mathrm{H_0}$ は棄却され，C 大生の視聴率は全国平均と比べて低かったといえる．

8

X	Y	U=X-10	V=X=70	U^2	V^2	UV
7	60	-3	-10	9	100	30
8	50	-2	-20	4	400	40
9	66	-1	-4	1	16	4
9	83	-1	13	1	169	-13
10	66	0	-4	0	16	0
12	73	2	3	4	9	6
12	91	2	21	4	441	42
13	87	3	17	9	289	51
	和	0	16	32	1440	160
	平均	0	2	4	180	20

Cov(X,Y) = E(UV) - E(U)E(V) =	20.0
V(X) = E(U^2) - E(U)^2 =	4.0
V(Y) = E(V^2) - E(V)^2 =	176.0
r = Cov(X,Y)/(σ(X)σ(Y)) =	0.754
b = Cov(X,Y)/V(X) =	5.0
a = E(Y) - b E(X) =	22.0



a) $r = 0.754$

b) $Y = 22 + 5X$

c) $80 > 22 + 5X$ を解いて，$X > 11.6$（時間）

2019 年 1 月 8 日