統計的検定

まず例として，次のような状況を考える．長年同じ数学の講義を担当している先生が学期末試験をおこなったところ，今年度の学生の平均が従来の学生の平均より 5 点高かったとする．このとき，今年度の学生は例年にくらべて成績優秀と判断してよいだろうか．次の 2 通りの解釈が可能である．

(1) 5 点ぐらいの差は偶然起こりうるので，今年度の学生も従来の学生と特に変わりない．
(2) 5 点も平均点が高いということは，学生の能力が同じならば偶然では "めったに起こらないこと" なので，今年度の学生はいつもより成績優秀と考えてよい．

この判断には，毎年の試験の難易度がもちろん関わってくるわけだが，ここでは，この先生は毎年同じ問題を出していたとし，学生も毎年同じ条件で試験を受けていたと仮定する．それでも，この判断を下すには，クラスの人数や点数の散らばりの程度なども考慮しないといけない．

二つ以上のデータの間の差が偶然によるものか，それとも意味のある差なのかを判断するためには統計的仮説検定（test, statistical test, hypothesis test）と呼ばれる方法が使われる．統計的仮説検定では，仮説を表現する方法として

帰無仮説（null hypothesis）　記号 H_0　と
対立仮説（alternative hypothesis）　記号 H_1　を

対置する方法をとる．帰無仮説をたてるということは，「差がある」ことを確認するために、「差がない」という前提（仮説）を取り敢えずたててみることであり，この仮説は「無に帰したい仮説」である．こうしてたてた仮説を採択する（正しいとみなす）か棄却する（正しくないとみなす）かを判断するために，仮説が "めったに起こらないこと" であるとみなす規準となる確率 α を定める．そして，確率 α より小さい確率で起きることを "めったに起こらない" とみなすのである．α は有意水準と呼ばれ，通常 α として 5% とか 1% とする，

例 1. 上の例をもう少し具体的にみてみる．例年の試験の平均点は 50 点で，標準偏差は 18.0 点であるとする．今年のクラス 36 名の平均点は 55 点だったとする．このデータのもとに，今年の学生が従来よりできのよい学生の集まりなのかを，有意水準 5% で検定してみる．このとき

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 50,$
対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu > 50.$

とする．対立仮説をこのように $\mu > 50$ とか $\mu < 50$ とおくのを片側検定 といい，単に H_0 の否定 $\mu \neq 50$ とするのを両側検定 という．

H_0 とは，今年の学生も従来と変わりないと仮定することだから，もしそうだとして試験を行えば，36 人の試験の平均点 $\overline{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従うはずである．このとき

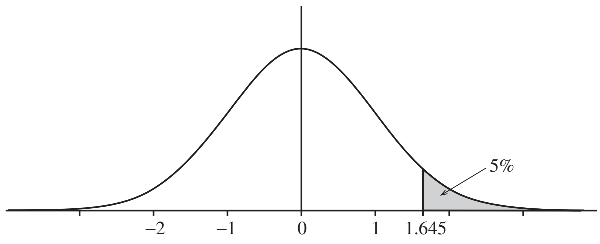
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．平均点は 55 点だったということは $\overline{X} = 55$ であったということだから，上のデータをあてはめると

$$Z = \frac{55 - 50}{\frac{18.0}{\sqrt{36}}} = \frac{5}{3} = 1.667$$

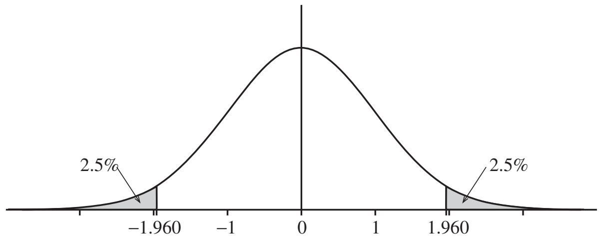
となる．ここで次のページのグラフを見ると 1.667 は影を付けた部分に入っている．

【裏につづく】



これは，帰無仮説を前提として算出された確率が規準より低い水準（5% 以下）であること，すなわち “平均点が 55 点である” ということは偶然では “めったに起きないこと” だという意味である．したがって，帰無仮説 H_0 は棄却すべきということになる．これにより，対立仮説 H_1 を採択し「今年の学生は従来より出来がよい」と言えることになる．

なお，両側検定の場合には，上の図の代わりに下の図を使う．



例 2. 硬貨を 4 回投げたら 4 回とも表が出たとき，この硬貨は表が出やすいといえるか．また 5 回投げて 5 回とも表が出た場合はどうか．そこで

$$H_0 : \text{表の出る確率} = 1/2 \qquad H_1 : \text{表の出る確率} \neq 1/2$$

とし，H_0 を仮定する．すると，硬貨を 4 回投げて 4 回表が出る確率は $(1/2)^4 = 6.25\%$ となる．有意水準 5% で考えれば，これは H_0 の棄却域に入らないので，何ともいえないことになる．5 回とも表の場合は確率 3.125% となり，H_0 は棄却され，この硬貨は表が出やすいといって差し支えなくなる．

練習問題

$\boxed{1}$ 排気量 1800cc として販売されている自動車 20 台について実際の排気量を調べたところ，平均 1811cc であった．排気量の標準偏差が 15.0cc であるとわかっているとして，この標本平均が公称の 1800cc からずれているかどうか，有意水準 5% で検定せよ．

$\boxed{2}$ ボタンを押すと 000〜999 の数字が並ぶ機械がある．この機械で 1000 回ボタンを押すと，777 のように 3 つの同じ数字の並ぶ場合が 15 度あった．この機械は 3 つの同じ数字が並びやすいといえるかどうか，有意水準 5% で検定せよ．

$\boxed{3}$ ある電話会社の調査によると，家庭の 1 ヶ月の平均電話回数は 86 回であった．先月，電話料金の改定が行われた．100 軒の家庭についての最近の調査によると，電話の平均回数は 84 回に減少し，その標準偏差は 12 回であった．この結果は料金の改定が電話利用の減少の原因であったという議論を支持しているか．有意水準 5% で検定せよ．