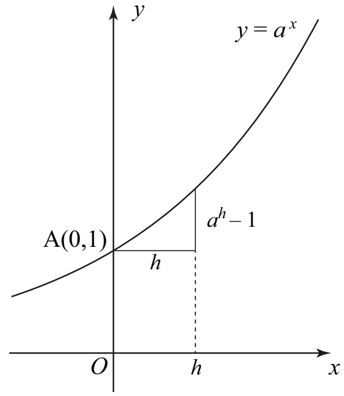
a を 1 でない正の定数とするとき，a を底とする x の指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい．いま，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

であるから，

(1)　$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$



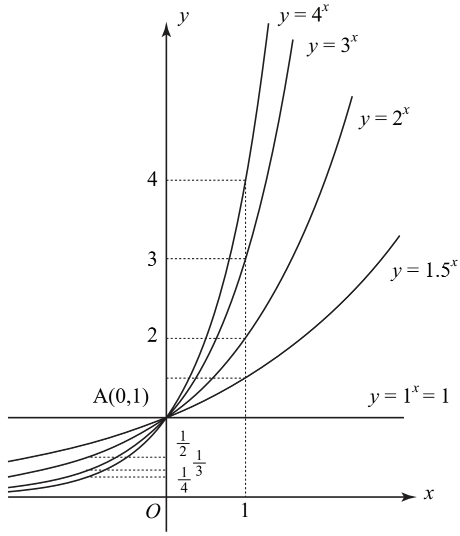
となる．ここで，右の図において

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

というのは，曲線 $y = a^x$ の上の点 A$(0,1)$ における接線の傾きにほかならない．いま，それを m_a で表すことにすれば，(1) から

(2)　$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot m_a$$

ということになる．



さて，右の図からわかるように，曲線 $y = a^x$ の上の点 A$(0,1)$ における接線の傾き m_a は，a が大きくなるほど大きくなる．前回の数値計算で見たとおり、

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq 0.693\ldots \qquad \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq 1.099\ldots$$

であった．したがって，ちょうど $m_a = 1$ となるような a の値が 2 と 3 の間にちょうど一つあるだろうと考えられる．いま，$m_a = 1$ となるような a の値を e という文字で表し，Nepier の数とか，自然対数の底と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である．

(3)　$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

すると (2) から，$f(x) = e^x$ ならば $f'(x) = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \dfrac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ が得られる．

指数関数の e^x の導関数：　$(e^x)' = e^x$

入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
											氏 名	

$\boxed{1}$ c を定数としたとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{ch}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{ch}-1}{ch}\cdot c=\lim_{ch\to 0}\frac{e^{ch}-1}{ch}\cdot c=c$ が成り立つ．このことを用い，関数 $f(x)=e^{cx}$ の導関数 $(e^{cx})'$ を定義から直接計算せよ．

$\boxed{2}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a}=a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$ である．これを用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意．］

$\boxed{3}$ $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．そこで，$f'(x)=e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x)=\log x$ の導関数が $\dfrac{1}{x}$ であること，すなわち $\left(\log x\right)'=\dfrac{1}{x}$ であることを示せ．

【裏に続く】

$\boxed{4}$ 前問によれば，$f(x)=\log x$ としたとき，$f'(1)=\frac{1}{1}=1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+h)=\lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

だから，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は $\log$ をとると 1 になるような値であることがわかる．すなわち，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

である．次の表は $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算するためのものである．$h=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{1024}$ として電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

［電卓では数の 2 乗を計算するのに “× =” と入力すればよい．例えば，$\left((1\div 4+1)^2\right)^2$ を計算するには，1，÷，4，+，1，=，×，=，×，=，の順に入力すればよい．］

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1+1\div 2)^2=2.25$
$\frac{1}{4}$	$\left((1+1\div 4)^2\right)^2=2.441406\ldots$
$\frac{1}{8}$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$
$\frac{1}{2048}$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$
0	

これより，$e=\boxed{}$ と推測される．

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

$\boxed{5}$ 関数 $y = e^x$ について，いろいろな x に対する y の値は次の表のようになる．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して，指数関数 $y = e^x$ のグラフを描き，そのグラフの $(0, 1)$ における接線を引いてみよ．また，対数関数 $y = \log x$ は $y = e^x$ の逆関数であることを用い，$y = \log x$ のグラフを描き，$(1, 0)$ における接線を引いてみよ．