

以下の問題は、公式  $(x^a)' = ax^{a-1}$  が任意の有理数  $a$  について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

1 【 $n$  が自然数の場合】 任意の自然数  $n$  について  $f_n(x) = x^n$  とおく。  $f_n'(x) = nx^{n-1}$  であることを数学的帰納法で証明したい。

(I)  $n = 1$  のとき、  $f_1(x)$  を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II)  $n = k$  のとき成り立つとすると、  $f_k'(x) = kx^{k-1}$ 。いま、  $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$  だから、積の微分公式を用いて、

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

[結論まできちんと述べよ。]

2 【 $n$  が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて  $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$  を求めよ。

b)  $(x^{-n})'$  を  $ax^b$  の形に表せ。

| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 |  | 校 | フリガナ |
|------|----|----|---|----|--|---|------|
|      |    |    |   |    |  |   | 氏名   |

3 【 $a = 1/n$  の場合】  $f(x) = x^n$  とすると、関数  $\sqrt[n]{x}$  は、関数  $f(x)$  の逆関数である。すなわち  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  である。

a) 逆関数の微分公式を用いて  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$  であることを示せ。

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより  $(x^{\frac{1}{n}})'$  を  $ax^b$  の形に表せ。

4 【 $a$  が有理数の場合】  $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$  であることを用い、合成関数の微分公式を用いて  $(x^{\frac{m}{n}})'$  を  $ax^b$  の形に表せ。

5 次関数を変数  $x$  で微分せよ.

a)  $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 3}$

$f'(x) =$

b)  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 2x + 3}$

$f'(x) =$

c)  $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

d)  $f(x) = (x + 1)\sqrt{2 - x}$

$f'(x) =$

e)  $f(x) = \sqrt[4]{(x^2 + x + 1)^5}$

$f'(x) =$

f)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$f'(x) =$

$a$  を正の数としたとき、指数関数  $f(x) = a^x$  の導関数を求めたい。そのために、まず、 $f(x) = a^x$  の  $x = 0$  における微分係数を求める。その定義式は

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{\phantom{a^h - 1}}$$

である。そこで実験として  $a = 2$  と  $a = 3$  のときに  $\frac{a^h - 1}{h}$  の値の数値計算を試みる。√ 機能のある電卓などを用いて、 $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\dots}$ 、 $2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ 、... などと計算して、下の表を作ると

| $h$              | $\frac{2^h - 1}{h}$                                | $\frac{3^h - 1}{h}$                               |
|------------------|--|---|
| $\frac{1}{2}$    | $(1.41421356\dots - 1) \times 2 = 0.82842712\dots$ | $(1.73205080\dots - 1) \times 2 = 1.4641016\dots$ |
| $\frac{1}{4}$    | $(1.18920711\dots - 1) \times 4 =$                 | $(1.31607401\dots - 1) \times 4 =$                |
| $\frac{1}{8}$    | =  | =   |
| $\frac{1}{16}$   | =  | =   |
| $\frac{1}{32}$   | =  | =   |
| $\frac{1}{64}$   | =  | =   |
| $\frac{1}{128}$  | =  | =   |
| $\frac{1}{256}$  | =  | =   |
| $\frac{1}{512}$  | =  | =   |
| $\frac{1}{1024}$ | =  | =   |
| $\vdots$         | ↓  | ↓   |
| 0                |  |   |

この表より  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} = \boxed{\phantom{0.693}}$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = \boxed{\phantom{1.099}}$  と推測できる。