

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

以下の問題は、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

1 【 n が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく。 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい。

(I) $n = 1$ のとき、 $f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると、 $f_k'(x) = kx^{k-1}$ 。いま、 $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから、積の微分公式を用いて、

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

[結論まできちんと述べよ。]

2 【 n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ。

b) $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ。

3 【 $a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると、関数 $\sqrt[n]{x}$ は、関数 $f(x)$ の逆関数である。すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である。

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ。

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ を ax^b の形に表せ。

4 【 a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い、合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を ax^b の形に表せ。

5 次関数を変数 x で微分せよ。

a) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$
 $f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-2x+3}$
 $f'(x) =$

c) $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$
 $f'(x) =$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$
 $f'(x) =$

e) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+x+1)^5}$
 $f'(x) =$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$
 $f'(x) =$

a を正の数としたとき、指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい。そのために、まず、 $f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数を求める。その定義式は

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{}$$

である。そこで実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに $\frac{a^h - 1}{h}$ の値の数値計算を試みる。√機能のある電卓などを用いて、 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\dots}$ 、 $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ 、 $2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$ 、 \dots などと計算して、下の表を作ると

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$(1.41421356\dots - 1) \times 2 = 0.82842712\dots$	$(1.73205080\dots - 1) \times 2 = 1.4641016\dots$
$\frac{1}{4}$	$(1.18920711\dots - 1) \times 4 =$	$(1.31607401\dots - 1) \times 4 =$
$\frac{1}{8}$	=	=
$\frac{1}{16}$	=	=
$\frac{1}{32}$	=	=
$\frac{1}{64}$	=	=
$\frac{1}{128}$	=	=
$\frac{1}{256}$	=	=
$\frac{1}{512}$	=	=
$\frac{1}{1024}$	=	=
\vdots	↓	↓
0		

この表より $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} = \boxed{}$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = \boxed{}$ と推測できる。