復習問題の略解

$\boxed{1}$ x^3+2x^2-x

$\boxed{2}$ a) $-108a^8b^9$　b) $a^4+a^2b^2+b^4$

$\boxed{3}$ a) $3(x+3)^2$　b) $(x+2)(x^2-2x+4)$　c) $(a+b)(x-y)$

$\boxed{4}$ 筆算による割り算を実行すると，商は $x-2a$，余りは $-2a^3$ となる.

$\boxed{5}$ a) $P(2)=2^3+5\cdot 2^2-2\cdot 2-24=0$. これより，$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 0 であること，すなわち $P(x)$ は $x-2$ で割り切れることがわかる.

b) $P(x)$ を $x-2$ で割ると，$P(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$. $(x^2+7x+12)$ をさらに因数分解して $P(x)=(x-2)(x+3)(x+4)$.

c) $x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)$ と因数分解されるので, 最大公約数は $(x-2)(x+3)$, 最小公倍数は $x(x-2)(x+3)(x+4)$.

$\boxed{6}$ 筆算による割り算を実行すると，商は 5，余りは 7 となるので，$5+\dfrac{7}{x-2}$

$\boxed{7}$ $x^2-1=(x-1)(x+1)$，$x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$, $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$. 最大公約数：$(x-1)(x+1)$，最小公倍数：$(x-1)^2(x+1)^2$

$\boxed{8}$ a) $\dfrac{ay^2}{cx^3}$　b) $\dfrac{2}{6x-1}$　c) $\dfrac{3x-1}{x^2-x}$　d) $\dfrac{c}{bd}$　e) $\dfrac{1}{x+y+z}$　f) $\dfrac{-1}{a(a+h)}$

$\boxed{9}$ a) $x>1$　b) $2<x<6$

$\boxed{10}$ もとの立方体の 1 辺の長さを x とする. 縦横を変えて作った立方体の体積は $(x-2)(x+5)x$. これがもとの立方体の体積 x^3 より 48cm^3 したのだから，$(x-2)(x+5)x=x^3+48$. これを整理し，因数分解すると $(3x+8)(x-6)=0$. ここで，$x>0$ だから，$x=6$ が唯一の解となる.

$\boxed{11}$ x 軸方向に -1，y 軸方向に $+\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{12}$ a) $x=1\pm 2i$　b) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{4}$

$\boxed{13}$ a) $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$　b) $x\neq 10$　c) $x=3$

$\boxed{14}$ $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$ とし，$-1\leqq x\leqq 5$ においてグラフまたは増減表をかく. $x=5$ のとき最大で，最大値 13. $x=1$ のとき最小で，最小値 -3.

$\boxed{15}$ a) 1 円値上げすると $\frac{1}{2}$ 個売り上げが減るということだから, x 円値上げすると $\frac{x}{2}$ 個売り上げが減る. したがって, 売価が $(80+x)$ 円のとき何個の売り上げは $\left(100-\frac{x}{2}\right)$ となり, 売上金額は (売価)×(売り上げ個数) $=(80+x)\left(100-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}(x-60)^2+9800$. これより，最の売り上げ金額を得るための売価は $80+60=140$ 円.

b) a) より，最の売り上げ金額を得るの $x=60$ のとき. このとき，売価は $80+60=140$ 円.

$\boxed{16}$ 短い辺の長さを x とすると，長い辺の長さは $10-x$ となる.「短い辺」が「長い辺」より本当に短いための条件は $x<10-x$. すなわち $x<5$ である. 一方，長方形の面積は $x(10-x)$ なので,

$$x(10-x)\geqq 21 \iff -x^2+10x-21\geqq 0 \iff (x-3)(x-7)\leqq 0 \iff 3\leqq x\leqq 7$$

これと先ほどの条件を合わせて $3\leqq x<5$.

$\boxed{17}$ a) -3,　b) 10　c) $\dfrac{1}{10}$　d) $a^{\frac{1}{6}}$　e) ab

【裏につづく】

$\boxed{18}$ $\sqrt[10]{a^7}$　　$\boxed{19}$ a) $\frac{1}{6}$,　　b) 2　　c) 1　　$\boxed{20}$ $x = \frac{1}{2}$

$\boxed{21}$ 光が 1 回反射するごとに光度は $\frac{9}{10}$ になので，反射を n 回繰り返すたとき，光度はもとの $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ になる．これが $\frac{1}{9}$ 以下になるようにしたい．すなわち，$\left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{9}$ となる n を求めればよい．両辺の $\log_{10}$ をとり，対数の基本性質を用いて変形すると，$n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) < \log_{10} 1 - \log_{10} 9$. さらに変形して $n(2\log_{10} 3 - 1) < -2\log_{10} 3$. ここで，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて数値計算すると（n の係数が負なので不等号の向きが変わることに注意して），$n >= \frac{2\log_{10} 3}{1 - 2\log_{10} 3} = 20.834\ldots$. すなわち，21 回反射させればよいことがわかる.

$\boxed{22}$ a) 3　　b) 4　　c) $\frac{-1}{a(a+h)}$

$\boxed{23}$ a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(1+h)-1\right)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+4) = 4$

b) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(a+h)-1\right)^2 - (2a-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+8ah-4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+8a-4) = 4(2a-1)$

$\boxed{24}$ a) $f'(x) = \left(2(x^2+3x^3)\right)' = 2x(2+9x)$

b) $f'(x) = \left(6x^2 - x - 15\right)' = 12x - 1$

c) $f'(x) = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2$

$\boxed{25}$ a) 16　　b) 8

c) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - (2+h)^2 - (2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+5h^2+7h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+5h+7) = 7$

d) $y = 7x - 11$

e) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$　　f) $x = 1,\ -\frac{1}{3}$

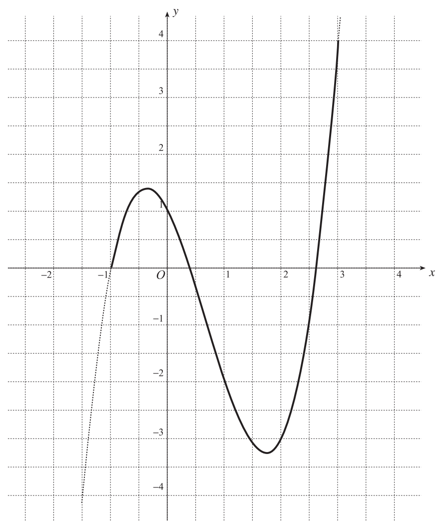
g) $f'(x) = -1$ となる x は 0 と $\frac{2}{3}$．$x = 0$ での接線 $y = -x + 1$，$x = \frac{2}{3}$ での接線 $y = -x + \frac{23}{27}$

h) 増減表を書くと $x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$，$x = 1$ で極小値 0.

$\boxed{26}$ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ で，$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ のとき．$-1 < \frac{2-\sqrt{10}}{3} < \frac{2+\sqrt{10}}{3} < 3$ となるので，この範囲で増減表を書くと

x	-1		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	4

したがって，$f(x)$ は $x = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ のとき最小で，最小値 $-\frac{25-20\sqrt{10}}{27} \fallingdotseq -3.27$，$x = 3$ のとき最大で，最大値 4 となる．グラフは右の図のようになる.



$\boxed{27}$ a) 各辺が正でなければいけないので $x > 0$ かつ $10-2x > 0$ かつ $16-2x > 0$. ゆえに $0 < x < 5$.

b) 体積 $V = x(10-2x)(16-2x) = 4x(5-x)(8-x)$.

c) $V' = \left(4(x^3 - 13x^2 + 40x)\right)' = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x-2)(3x-20)$. $0 < x < 5$ の範囲で $V' = 0$ となるのは $x = 2$ のみ．$0 < x < 5$ の範囲で増減表を書くと下のようになる.

x	0		2		5
V'		+	0	−	
V	0	↗	144	↘	0

したがって，$x = 2$ のとき，体積 V は最大となる.

2017 年 7 月 20 日