2017年7月21日

| 基礎数学 A1（金曜2限） | 入学年度 | 学部 | 学 科 | 組 | 番 号 | 検 | フリガナ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 期末試験 | | | | | | | 氏 名 | |

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

**1** $P(x) = x^3 + 8$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ とする．

a) $P(x)$ を因数分解せよ．

$P(x) = (x+2)(x^2-2x+4)$

b) $Q(-2)$ を求めよ．

$Q(-2) = -8+4+16-12 = 0$

c) $Q(x)$ を因数分解せよ．

$Q(x) = (x+2)(x^2-x-6)$
$= (x+2)(x+2)(x-3)$
$= (x+2)^2(x-3)$

d) $P(x) = x^3 + 8$ と $Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．

最大公約数 $=$ $x+2$

最小公倍数 $=$ $(x+2)^2(x-2)(x^2-2x+4)$

**2** 次の除法を行い，商と余りを求めよ．

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - x - 1 \\
3x^2 - x + 1 \overline{\smash{)}\, 6x^4 - 5x^3 \qquad\qquad + 1} \\
6x^4 - 2x^3 + 2x^2 \\
\hline
-3x^3 - 2x^2 \\
-3x^3 + x^2 - x \\
\hline
-3x^2 + x + 1 \\
-3x^2 + x - 1 \\
\hline
2
\end{array}
$$

商 $=$ $2x^2-x-1$ 　　余り $=$ $2$

**3** $\dfrac{6x^2-7x-5}{2x-3}$ を $ax + b + \dfrac{c}{2x-3}$ の形に表せ．

$\dfrac{6x^2-7x-5}{2x-3} = 3x+1+\dfrac{-2}{2x-3}$

$$
\begin{array}{r}
3x+1 \\
2x-3 \overline{\smash{)}\, 6x^2-7x-5} \\
6x^2-9x \\
\hline
2x-5 \\
2x-3 \\
\hline
-2
\end{array}
$$

**4** 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $\dfrac{6ab^2c}{\dfrac{ab}{3c}} = 18bc^2$

b) $\dfrac{a^2b+a^3}{b^2-ab} \div \dfrac{2a^2}{a-b} = \dfrac{\cancel{a^2}(a+b)}{b\cancel{(b-a)}} \times \dfrac{-\cancel{(b-a)}}{2\cancel{a^2}} = \dfrac{-(a+b)}{2b}$

c) $\dfrac{\cancel{2}\dfrac{a}{\cancel{bc}}}{\cancel{6}^{3}\left(\dfrac{a}{bc}\right)^{\cancel{2}} - \cancel{4}^{2}\dfrac{a}{\cancel{bc}}} = \dfrac{1}{3\left(\dfrac{a}{bc}\right)-2} = \dfrac{bc}{3a-2bc}$

d) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} - \dfrac{3x+5}{x^2+3x+2} = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)} - \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{(2x+1)(x+1)-(3x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \dfrac{-x^2+x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{-\cancel{(x+2)}(x-3)}{(x-1)(x+1)\cancel{(x+2)}} = \dfrac{-x+3}{(x-1)(x+1)}$

e) $\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{(x-1)+(x+1)}{x(x+1)(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{2(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \dfrac{3x-3}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$

f) $1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{1-x}} = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{1-x-x}{1-x}} = 1 - \dfrac{1-x}{1-2x}$

$= \dfrac{1-2x-(1-x)}{1-2x}$

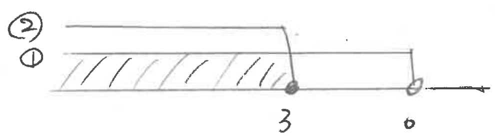
$= \dfrac{-x}{1-2x}$

**5** 次の不等式を解け．またその解を数直線上に表せ．

a) $\begin{cases} 2x+6 > 5x-12 & \text{—— ①} \\ 3x-7 \leqq 2(4-x) & \text{—— ②} \end{cases}$

① $-3x > -18$
$x < 6$

② $5x \leqq 15$
$x \leqq 3$



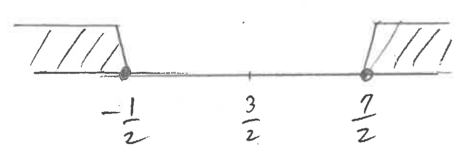

（解は共通部分だから）

$x \leqq 3$

b) $|2x-3| \geqq 4$

$\Leftrightarrow$ $2x-3 \leqq -4$ または $2x-3 \geqq 4$

$\Leftrightarrow$ $x \leqq -\frac{1}{2}$ または $x \geqq \frac{7}{2}$




$x \leqq -\frac{1}{2}$ または $x \geqq \frac{7}{2}$

【裏に続く】

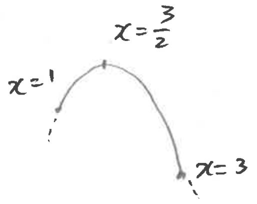
6 放物線 $y=-x^2+x-\frac{1}{2}$ は，放物線 $y=-x^2$ をどのように平行移動したものかを述べよ．

$$y=-x^2+x-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$$
$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$\begin{cases} x\text{軸方向に } -\frac{1}{2} \\ y\text{軸方向に } -\frac{1}{4} \end{cases}$ だけ平行移動したもの

7 2次関数 $y=-x^2+3x+1$ の $1\leqq x\leqq 3$ における最大値，最小値を求めよ．

$$y=-x^2+3x+1$$
$$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$



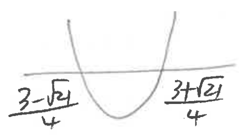

$\begin{cases} \text{最大値 } \frac{13}{4} \ \left(x=\frac{3}{2}\right) \\ \text{最小値 } 1 \ (x=3) \end{cases}$

8 a) 2次方程式 $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=0$ を解け．

$$4x^2-6x-3=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$$

b) 2次不等式 $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\leqq 0$ を解け．

$$\frac{3-\sqrt{21}}{4}\leqq x\leqq\frac{3+\sqrt{21}}{4}$$




9 1杯の原価が60円のコーヒーを，1杯200円で売ると，毎日120杯の売り上げがある．もし値上げをすれば，1杯10円の値上げにつき5杯の割合で，売り上げが減少するという．利益を最大にするには，1杯いくらで販売すればよいか．

$x$円値上げしたとすると 利益$y$は

$$y=(200+x-60)\left(120-\frac{x}{2}\right)$$
$$=(140+x)\left(120-\frac{x}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+50x+16800$$
$$=-\frac{1}{2}(x-50)^2+18050$$

したがって $x=50$ のとき利益最大

一杯250円とすればよい

10 次の各々の式を簡単にせよ．

a) $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=-2$

b) $\sqrt{ab^3}\times\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[6]{ab^5}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=ab$

c) $\log_8\sqrt{2}=\log_8 2^{\frac{1}{2}}=\log_8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_8 8^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$

d) $3^{\log_3 2}=2$

e) $\log_2(\sqrt{5}+1)+\log_2(\sqrt{5}-1)=\log_2(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$
$=\log_2(5-1)=\log_2 4=2$

11 光が鏡で1回反射するごとに，その光度の10%を失うという．このような反射をくり返すとき，光度がはじめてもとの光度の $\frac{1}{9}$ 以下になるのは何回目の反射のときか．ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

$n$回反射させたとすると光度は $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ になる

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n\leqq\frac{1}{9}$$
$$\log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n\leqq\log_{10}\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$n(\log_{10}9-\log_{10}10)\leqq\log_{10}1-\log_{10}9$$
$$n(2\log_{10}3-1)\leqq-2\log_{10}3$$
$$-0.0458n\leqq-0.9542$$
$$n\geqq\frac{0.9542}{0.0458}=20.8\cdots$$

21枚以上

12 静止している物体を自然に落下させるとき，落下を始めてから $t$ 秒間に落ちる距離を $y$ m とすると，$y=4.9t^2$ で与えられるとことが知られている．

a) 物体が落下し始めて $a$ 秒後から $b$ 秒後までに落ちる距離と，その間の平均の速さを求めよ．ただし，$a$，$b$ は $a<b$ をみたす定数とする．

距離：$4.9b^2-4.9a^2$ (m)

平均の速さ $\frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a}=4.9(b+a)$ (m/秒)

b) 物体が落下し始めて $c$ 秒後の瞬間の速さを極限を用いて計算せよ．ただし，$c$ は定数とする．

$$\lim_{h\to0}\frac{4.9(c+h)^2-4.9c^2}{h}=4.9\lim_{h\to0}\frac{2c\cancel{h}+h^2}{\cancel{h}}$$
$$=4.9\lim_{h\to0}(2c+h)=4.9\times2c=9.8c \ \text{(m/秒)}$$

c) 物体が落下し始めて $a$ 秒後から $b$ 秒後までの平均の速さは，$\frac{a+b}{2}$ 秒後の瞬間の速さに等しいことを示せ．

b)より $\frac{a+b}{2}$ 秒後の瞬間の速さ：$9.8\times\frac{a+b}{2}=4.9(b+a)$

a)より $a$秒後から$b$秒後の平均の速さは $4.9(b+a)$

よってこれらは等しい

13 次の極限値を求めよ．

a) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x-2}$

$$=\frac{1+1+1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a-h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{a-h-(a+h)}{(a+h)(a-h)}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(a+h)(a-h)}=\lim_{h\to0}\frac{-2}{(a+h)(a-h)}$$
$$=\frac{-2}{a^2}$$

| 基礎数学 A1（金曜２限） | 入学年度 | 学部 | 学 科 | 組 | 番 号 | 検 | フリガナ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 期末試験 | | | | | | | 氏 名 | |

12 関数 $f(x) = (3x-2)^2$ について，定義に従って，$x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ．

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(3(1+h)-2)^2 - (3\times 1 - 2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+3h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + 9h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6 + 9h) = 6$$

13 $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $f(x)$ の導関数を求めよ．（定義に従って計算する必要はない．）

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ．

$f'(2) = -3 - 1 + 2 = -2$

$f(2) = -2 - 1 + 4 + 1 = 2$

接線は $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ だから

$y - 2 = -2(x-2)$

$y = -2x + 6$

c) $f'(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

$-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 < 0$

$\Leftrightarrow (3x-4)(x+2) < 0$

$\Leftrightarrow -2 < x < \frac{4}{3}$

d) $f(x)$ の増減表を完成させ，$f(x)$ が極大値および極小値を求めよ．

| $x$ | … | $-2$ | … | $\frac{4}{3}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $\frac{71}{27}$ | ↘ |

極大値 $\frac{71}{27}$ $(x = \frac{4}{3})$

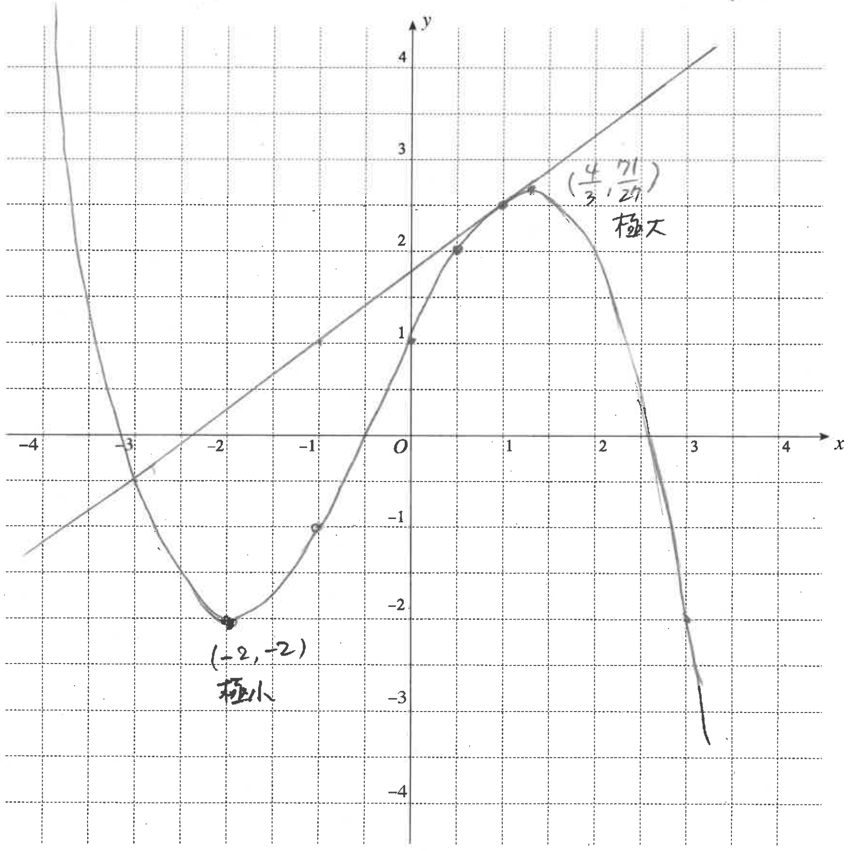
極小値 $-2$ $(x = -2)$

e) $f(-4), f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ をそれぞれ求めよ．

| | |
|---|---|
| $f(-4) = 5$ | $f(0) = 1$ |
| $f(-3) = -\frac{1}{2}$ | $f(1) = \frac{5}{2}$ |
| $f(-2) = -2$ | $f(2) = 2$ |
| $f(-1) = -1$ | $f(3) = -2$ |

f) ここまでの結果を反映させ，$y = f(x)$ のグラフと，$(1, f(1))$ における接線をのグラフをなるべく丁寧に描け．

$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$




14 a) 次の式を計算せよ．

$4(A - 2(B - C)) - 3(A - (2B - C))$

$= 4A - 8B + 8C - 3A + 6B - 3C$

$= A - 2B + 5C$

b) $A = -3x^2 - xy + 2y^2$, $B = 2x^2 - 3xy + 3y^2$, $C = -x^2 + 2xy - y^2$, とするとき，次の式を計算せよ．

$4(A - 2(B - C)) - 3(A - (2B - C))$

$= A - 2B + 5C$

$= (-3x^2 - xy + 2y^2) - 2(2x^2 - 3xy + 3y^2) + 5(-x^2 + 2xy - y^2)$

$= -12x^2 + 15xy - 9y^2$

$= -3(4x^2 - 5xy + 3y^2)$

—以上—