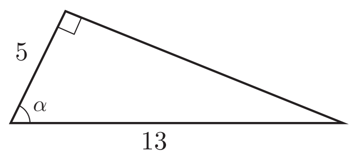
入学年度	学部	学 科		組		番 号		検	フリガナ
									氏 名

1　右の図の直角三角形について，角 α の正弦，余弦，正接を求めよ．

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan\alpha = \frac{12}{5}$

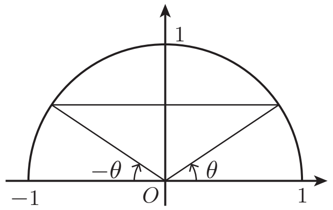


2　右の図を参照して次の式を $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

a) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

b) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

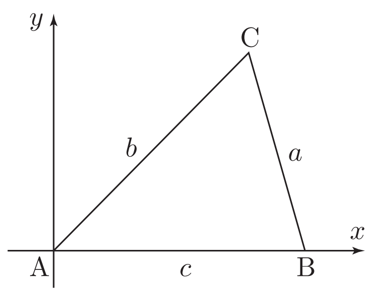
c) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$



3　次の表を完成させよ．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4　三角形 △ABC に対して右図のように座標軸を定めれば，3 頂点の座標はそれぞれ，$\mathrm{A}(0, 0)$，$\mathrm{B}(c, 0)$，$\mathrm{C}(b\cos A, b\sin A)$ となる．2 点 B，C 間の距離の 2 乗を二通りに表すことにより余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を証明せよ．



まず，$\mathrm{BC}^2 = a^2$ である．一方，2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) の間の距離は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ だから，

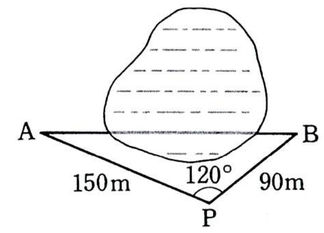
$$\begin{aligned}
\mathrm{BC}^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2 \\
&= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A \\
&= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2 \\
&= b^2 - 2bc\cos A + c^2
\end{aligned}$$

したがって，$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$ が成り立つ．

5　右の図のように，池を隔てた 2 地点 A，B 間の距離を求めるため，PA，PB，∠APB を測ったところ，

$$\mathrm{PA} = 150\mathrm{m},\ \mathrm{PB} = 90\mathrm{m},\ \angle\mathrm{APB} = 120^\circ$$

であった．A，B 間の距離を求めよ．



△APB に余弦定理を適用して，

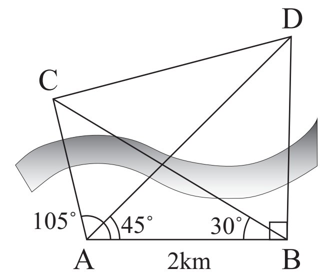
$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PA}^2 - 2\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cos P \\
&= 150^2 + 90^2 - 2 \times 150 \times \cos 120^\circ \\
&= 44100
\end{aligned}$$

従って，$\mathrm{AB} = \sqrt{44100} = 210(\mathrm{m})$.

6　2km 離れた 2 地点 A，B から川の向こうにある 2 地点 C，D を見たら，

$$\angle\mathrm{BAC} = 105^\circ,\quad \angle\mathrm{BAD} = 45^\circ,$$
$$\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ,\quad \angle\mathrm{ABD} = 90^\circ$$

であった．次の 2 地点間の距離を求めよ．



a) A，C 間および A，D 間の距離　［ヒント：△ABC に正弦定理を用いる．△ABD は直角二等辺三角形］

△ABC に正弦定理を用いると，$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$．ゆえに $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ (km)

△ABD は直角二等辺三角形だから $\mathrm{AD} = \sqrt{2}\,\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$ (km)

b) C，D 間の距離　［ヒント：△CAD に余弦定理を用いる．］

△CAD に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{CD}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cos 60^\circ \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2 + 8 - 4 = 6
\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CD} = \sqrt{6}$.

7　次の角は弧度法でいくらか．

a) $12^\circ = \frac{\pi}{15}$　b) $15^\circ = \frac{\pi}{12}$　c) $36^\circ = \frac{\pi}{5}$　d) $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

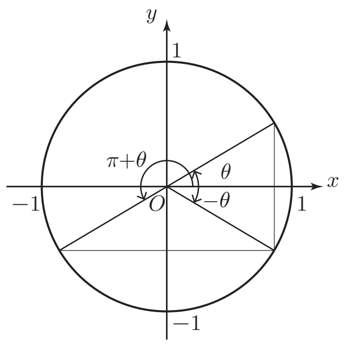
e) $90^\circ = \frac{\pi}{2}$　f) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$　g) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$　h) $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$

8 弧度法で表された次の角を度数で表せ.

a) $\dfrac{\pi}{10} = 18^\circ$　b) $\dfrac{\pi}{5} = 36^\circ$　c) $\dfrac{2\pi}{3}\,120^\circ =$　d) $\dfrac{5\pi}{12} = 75^\circ$

e) $\dfrac{5\pi}{4} = 225^\circ$　f) $\dfrac{3\pi}{2} = 270^\circ$　g) $\dfrac{7\pi}{4} = 315^\circ$　h) $3\pi = 540^\circ$

9 右の図を参照して次の式を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ.



a) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

c) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

d) $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

e) $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$

f) $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

10 次の値を求めよ.

a) $\sin\dfrac{16\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　b) $\cos\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　c) $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

11 次の方程式をみたす角 θ を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

a) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$

b) $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

12 次の不等式をみたす角 θ の範囲を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

a) $\cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

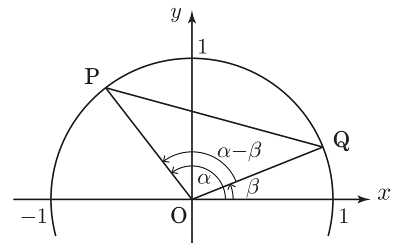
$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{11\pi}{6}$

b) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{5\pi}{6}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

13 右の図を参照して三角関数の加法定理を証明したい.



a) △OPQ に余弦定理を適用して, PQ^2 を $\cos(\alpha-\beta)$ を用いて表せ.

$\mathrm{PQ}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$

b) P, Q の座標がそれぞれ $\mathrm{P}(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{Q}(\cos\beta, \sin\beta)$ であることを使って, PQ^2 を $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ を用いて表せ.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2 \\
&= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha \\
&= (\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

c) a) と b) の結果をあわせて, $\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理を示せ.

a), b) より, $\mathrm{PQ}^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$.
これより, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ を得る.

d) 関係式 $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ を用いて, $\sin(\alpha+\beta)$ の加法定理を示せ.

［ヒント：$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.］

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

14 次の方程式を解け. ただし, $0 \leqq x < 2\pi$ とする.

a) $\sin 2x = \cos x$

$$
\begin{aligned}
&\sin 2x = \cos x \\
\Leftrightarrow\ &\sin x\cos x = \cos x \\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x - 1)\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sin x = \frac{1}{2} \text{ または } \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

b) $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
&\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\cos x = \frac{1}{2} \text{ または } -2 \\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}
\end{aligned}
$$

中央大学