復習問題

1 不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ. b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

2 次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$ d) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$

3 a) α を正の実数とするとき, $1+\alpha$ の 立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1+\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ.

b) $\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

4 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{e^x-1-x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

5 つぎの 2 変数関数について, 各変数に関する偏微分を計算せよ.

a) $f(x,y)=x^4-4x^2y^2+3xy^3-y^4+3$ b) $f(x,y)=(x+2y^2+1)^3$

c) $f(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ d) $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$

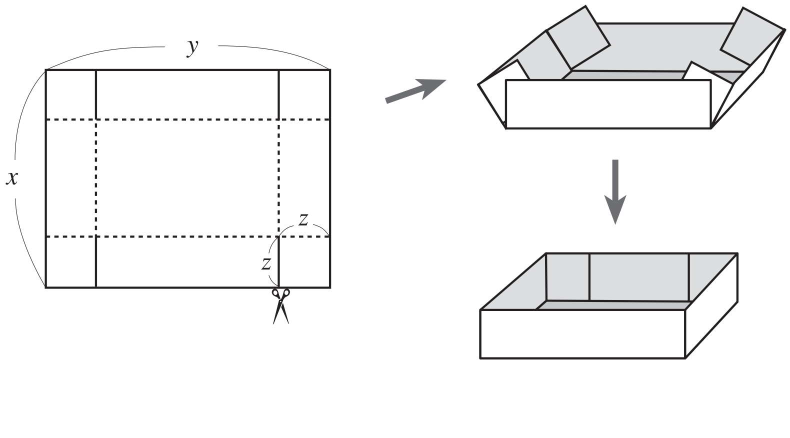
6 次の関数の臨界点を求め, 各臨界点において極大・極小を判定せよ.

a) $f(x,y)=x^3-6x^2+x^2y^2-y^2$ b) $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$

7 条件 $x^2+xy+y^2=1$ のもとで, xy の最大値と最小値を求めよ.

8 たて x cm, よこ y cm のボール紙を使い, 図のように四隅に z cm の切り口をいれ, z cm 四方の のりしろを作って折り曲げ, のりで貼ることにより, ふたのない箱をつくる. このとき, 使用するボール紙の面積を一定値 a^2 に保ったまま, 箱の容積を最大にすることを考える. ただし, a は正の定数とする.



a) 箱の容積を x と z の 2 変数関数とみて，それを $V(x,z)$ と書く．$V(x,z)$ を具体的に書き表せ.

b) 関数 $V(x,z)$ を領域 $D=\{(x,z) \mid 0<2z<x, 2xz<a^2\}$ 上で考える．$V(x,z)$ の偏微分を計算し，D 内における臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）を求めよ.

c) 上で求めた臨界点において $V(x,z)$ が最大になることは認める．$V(x,z)$ の D における最大値を求めよ．また，そのときの箱の寸法はどのようなものであるかを述べよ.

d) 箱の容積を x, y, z の 3 変数関数とみて，$V(x,y,z)$ と書く．Lagrange の乗数法を用い，$V(x,y,z)$ が $xy=a^2$ という拘束条件の下で最大になるような x,y,z を求めよ.

9　消費者の効用関数が $u(x,y)=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ で与えられているとする．このとき，$40x+18y=120$ という条件のもとで効用 $u(x,y)$ を最大にするような (x,y) を Lagrange の乗数法により求めよ.

10　ある財の需要関数 $x=D(p)$ が

$$D(p)=a-bp,\quad a,b>0$$

で与えられているとする.

a) この財の需要の価格弾力性 $\mathrm{El}_p\, D(p)$ を求めよ.

b) 価格 p が $p>0$ かつ $D(p)>0$ であるような範囲を動くとき，需要が価格弾力的となる p の範囲を求めよ.