多変数関数の偏微分

$\boxed{1}$ ある町工場では 2 種類の自転車を製作している．ひとつの種類は標準モデルで，もう 1 種類は競技用モデルである．いま，一週間に，標準モデルを $x$ 台，競技用モデルを $y$ 台製作するのに

$$C(x,y)=70+7x+10y\ \text{（千円）}$$

の費用がかかるとしよう．さらに，価格と需要の関係は次の式にしたがっているとする．

$$p=21-0.4x+0.1y$$
$$q=30+0.1x-1.2y$$

ここで，$x$（台），$y$（台）はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要，$p$（千円），$q$（千円）はそれぞれ，標準モデルと競技用モデルの値段である．

a) 一週間の歳入 $R(x,y)$ を求めよ．また，$R(25,10)$ を計算せよ．

b) 一週間に得られる利潤 $P(x,y)=R(x,y)-C(x,y)$ を求めよ．また，$P(25,10)$ を計算せよ．

c) 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき，標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

d) 逆に，標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき，競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

2 変数関数 $z=f(x,y)$ に対し，変数 $y$ は固定して定数と見なし，$z$ を $x$ の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z=f(x,y)$ の $x$ に関する偏微分と呼ぶ．これを

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=f'_1(x,y)=f_x(x,y)=\partial_x f(x,y)$$

などと様々な記号で表わされる．同様にして変数 $x$ は固定して定数と見なし，$z$ を $y$ の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z=f(x,y)$ の $y$ に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=f'_2(x,y)=f_y(x,y)=\partial_y f(x,y)$$

などと表わす．

$\boxed{2}$ a) 上の問題の $P(x,y)$ について，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．また，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(15,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(30,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(25,10)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(25,15)$ をそれぞれ計算せよ．

b) 利潤 $P(x,y)$ が最大になるような生産台数 $x$，$y$ の組を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の各々の関数について各変数に関する偏微分を計算せよ．

a) $f(x,y)=5x^4y^2-2xy^5$　b) $f(x,y)=e^{x-y}$　c) $f(x,y)=\dfrac{e^x}{y}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$　e) $f(x,y)=\log(x-y)$　f) $f(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

【裏につづく】

関数 $z = f(x, y)$ において $x$ を $x + \Delta x$ に，$y$ を $y + \Delta y$ に同時に変化させたとき，$z$ の増分 $\Delta z$ は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y$$

で与えられることが知られている.

$\boxed{4}$ 底面の半径 $r$ cm，高さ $h$ cm の直円柱の底面の半径と高さが，それぞれ，わずかに $\Delta r$ cm，$\Delta h$ cm ずつ増えたとき，直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか，また表面積はどれくらい増えるか.

$\boxed{5}$ 生産量 $Q$ が資本 $K$ と労働力 $L$ の関数として $Q = f(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial K}(K, L)$，$\dfrac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ を求めよ.【注】$\dfrac{\partial f}{\partial K}(K, L)$ は**資本の限界生産力**，$\dfrac{\partial f}{\partial L}(K, L)$ は**労働の限界生産力**と呼ばれる.

b) いま $(K, L)$ が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき，$Q$ の変化量の近似値を求めよ.